[1]

(1)　題意より $a \fallingdotseq 0$ なる定数 a を用いて

$$f(x)=a(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$$

と表され，$f(0)=0$ より

$$a\cos^2\theta+\sin\theta=0$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos^2\theta>0$ だから

$$a=-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

よって $f(x)=-\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}x^2+\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta}x$ …[答]

(2)　$f(x)=-\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}x(x-2\cos\theta)$

だから

$$V=\pi\int_0^{2\cos\theta}\frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta}x^2(x-2\cos\theta)^2dx$$

$$=\frac{\pi\sin^2\theta}{30\cos^4\theta}(2\cos\theta)^5$$

$$=\frac{16\pi\sin^2\theta\cos\theta}{15}$$ …[答]

(3)　$\sin^2\theta\cos\theta=(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

だから　$g(x)=(1-x^2)x=x-x^3$

とおくと，$g'(x)=1-3x^2$

$0<x<1$ において

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

これと $V=\dfrac{16\pi}{15}g(\cos\theta)$ より，V は

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき 最大値 $\dfrac{32\sqrt{3}\pi}{135}$ をとる。 …[答]

高松高等予備校

[2]

$0<x<1$ …①

①のとき　$1-x^2>0$，$0<x<1<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos x>0$

$f(x)=\cos^2 x-(\sqrt{1-x^2})^2=\cos^2 x-(1-x^2)=\cos^2 x-1+x^2$ とおく

①のとき

$f'(x)=2\cos x(-\sin x)+2x=2x-\sin 2x$

$f''(x)=2-2\cos 2x=2(1-\cos 2x)$

$f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ …②の範囲で連続である。

①のとき $\cos 2x<1$ より $f''(x)>0$ となり $f'(x)$ は②において単調増加

$f'(0)=0$ より①において $f'(x)>0$ となり②において $f(x)$ は単調増加

$f(0)=0$ より①において $f(x)>0$

よって，$(\sqrt{1-x^2})^2<\cos^2 x$

$\sqrt{1-x^2}>0$，$\cos x>0$ より $\sqrt{1-x^2}<\cos x$ …③

$(\sqrt{1-x^2})^2-(1-x^2)^2=1-x^2-(1-2x^2+x^4)=x^2-x^4=x^2(1-x^2)>0$

①のとき $(1-x^2)^2<(\sqrt{1-x^2})^2$

$1-x^2>0$，$\sqrt{1-x^2}>0$ より $1-x^2<\sqrt{1-x^2}$ …④

③，④より

$$1-x^2<\sqrt{1-x^2}<\cos x$$ …[答]

高松高等予備校

[3]

（ⅰ）　$a=0$ のとき

$y=b$ と楕円が $y>0$ で異なる 2 点で交わるのは

$$0<b<2$$

（ⅱ）　$a\neq 0$ のとき

$$x=\frac{y-b}{a}$$

これと楕円の交点の y 座標は

$$4x^2+9y^2-36=0$$

$$4\left(\frac{y-b}{a}\right)^2+9y^2-36=0$$

$$4\frac{y^2-2by+b^2}{a^2}+9y^2-36=0$$

$$(4+9a^2)y^2-8by+4(b^2-9a^2)=0 \quad \cdots①$$

これが $0<y\leqq 2$ で異なる 2 つの実数解を持てばよいから

$$f(y)=(4+9a^2)y^2-8by+4(b^2-9a^2)$$

とおくと

（イ）　①の判別式を D とすると

$$D/4>0$$

$$16b^2-4(4+9a^2)(b^2-9a^2)>0$$

$$9a^2(9a^2-b^2+4)>0$$

$a^2>0$ より

$$9a^2-b^2+4>0$$

$$\frac{9a^2}{4}-\frac{b^2}{4}>-1 \quad \cdots②$$

（ロ）　$z=f(y)$ の軸について

$$0<\frac{4b}{4+9a^2}\leqq 2$$

$$0<b\leqq\frac{9}{2}a^2+2 \quad \cdots③$$

（ハ）　$z=f(y)$ は下に凸より

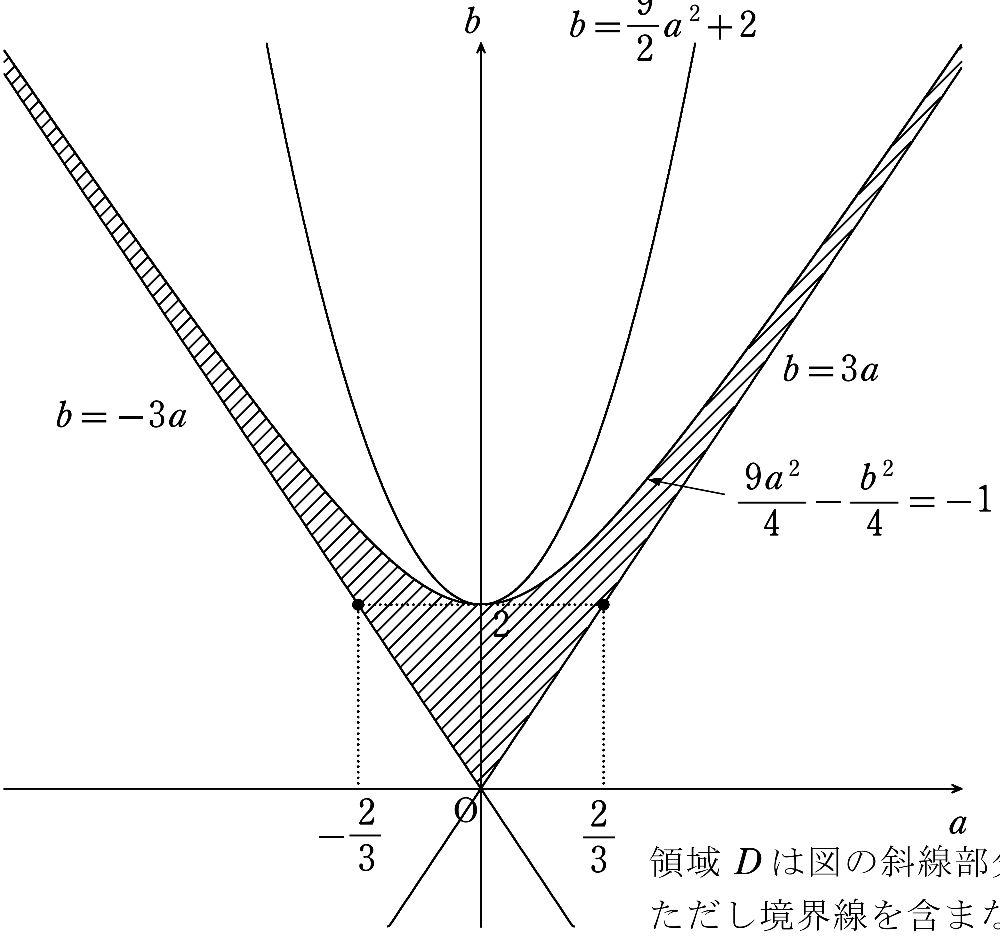
$f(0)>0$ かつ $f(2)\geqq 0$

$4(b^2-9a^2)>0$ かつ $4(4+9a^2)-32b+4(b^2-9a^2)\geqq 0$

$(b+3a)(b-3a)>0$ かつ $(b-2)^2\geqq 0$

$$(b+3a)(b-3a)>0 \quad \cdots④$$

(ⅰ)(ⅱ)より

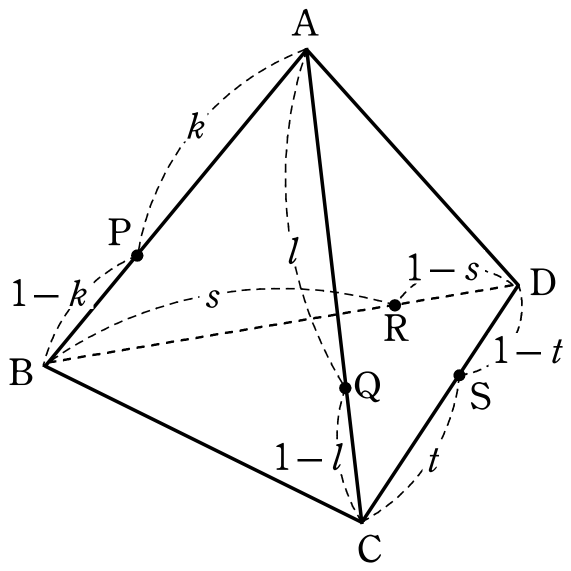


領域 D は図の斜線部分
ただし境界線を含まない

…[答]

高松高等予備校

[4]



実数 k, l, s, t を用いて

$$\begin{cases} \mathrm{AP}:\mathrm{PB}=k:(1-k) \\ \mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=l:(1-l) \\ \mathrm{BR}:\mathrm{RD}=s:(1-s) \\ \mathrm{CS}:\mathrm{SD}=t:(1-t) \end{cases}$$

とおく。ただし，$0<k<1$，$0<l<1$，$0<s<1$，$0<t<1$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-k-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ \overrightarrow{\mathrm{PS}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}} \end{cases} \quad \cdots①$$

ここで 4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあるから，実数 m，n を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=m\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+n\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

①を代入

$$-k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$=\{-mk+n(1-k-s)\}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+ml\overrightarrow{\mathrm{AC}}+ns\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は一次独立

$$\begin{cases} -k=-mk+n(1-k-s) & \cdots② \\ 1-t=ml & \cdots③ \\ t=ns & \cdots④ \end{cases}$$

③，④より

$$m=\frac{1-t}{l},\quad n=\frac{t}{s}$$

これを②に代入して整理すると

$$ks-ksl-kst=lt-ltk-lts$$

両辺に $klst$ を加えると

$$ks-ksl-kst+kslt=lt-ltk-lts+kslt$$

$$ks(1-l-t+lt)=lt(1-k-s+ks)$$

$$ks(1-l)(1-t)=lt(1-k)(1-s)$$

$1-k \fallingdotseq 0$，$1-l \fallingdotseq 0$，$1-s \fallingdotseq 0$，$1-t \fallingdotseq 0$ であるから

$$\frac{k}{1-k}\cdot\frac{s}{1-s}=\frac{l}{1-l}\cdot\frac{t}{1-t}$$

よって

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}=\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{SD}}$$

…[答]

高松高等予備校