[1]

(1)　$\angle\mathrm{DAE}=60^\circ$，$\angle\mathrm{AED}=90^\circ$ より

$$\mathrm{AE}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}=3$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{3}{t}\vec{a}$ …[答]

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ (k は実数) とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{DF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$ より

$$\left\{k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\vec{b}\right\}\cdot\vec{b}=0$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=t\cdot 3\cdot\cos 60^\circ=3t$ より

$$(3t+36)k=36$$

$$k=\frac{12}{t+12}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{12}{t+12}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ …[答]

(2)　点 F は線分 AC 上にあるので

$$\angle\mathrm{DEF}<\angle\mathrm{DEB}=90^\circ$$

$\angle\mathrm{ADF}=90^\circ$ なので

$$\angle\mathrm{EDF}<90^\circ$$

よって $\triangle\mathrm{DEF}$ が直角三角形のとき

$$\angle\mathrm{DFE}=90^\circ$$

このとき $\mathrm{AD}/\!/\mathrm{EF}/\!/\mathrm{BC}$ なので

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}}$$

(1) より

$$\frac{3}{t}=\frac{12}{t+12}$$

$t=4$ …[答]

高松高等予備校

[2]

(1)　点 P が時刻 2 で頂点 A にいる場合は

$$\begin{cases} A \to B \to A \\ A \to C \to A \\ A \to D \to A \end{cases}$$

よって確率は

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{15} \\ \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{15} \\ \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{15} \end{cases}$$

したがって

$$a_2 = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$$ …[答]

(2)　点 P が時刻 3 で頂点 A にいる場合は

$$\begin{array}{l} A \to B \to C \to A \\ \qquad\quad \searrow D \to A \\ A \to C \to B \to A \\ \qquad\quad \searrow D \to A \\ A \to D \to B \to A \\ \qquad\quad \searrow C \to A \end{array}$$

よって確率は

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{8}{75} \\ \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{8}{75} \\ \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{8}{75} \end{cases}$$

したがって

$$a_3 = \frac{8}{75} + \frac{8}{75} + \frac{8}{75} = \frac{8}{25}$$ …[答]

(3)　点 P が時刻 1 で頂点 B にあり，かつ時刻 4 に頂点 A にいる場合は

A→B→A→B→A
C→A
D→A
C→D→A
B→A
D→C→A
B→A

よって確率は

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{375}$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{375}$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{375}$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{375}$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{375}$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{375}$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{375}$$

したがって，点 P が時刻 1で頂点 B にあり，かつ時刻 4 で頂点 A にいる確率は

$$\frac{1}{375}+\frac{2}{375}+\frac{2}{375}+\frac{8}{375}+\frac{4}{375}+\frac{8}{375}+\frac{4}{375}$$

$$=\frac{29}{375}$$

時刻 1 で頂点 C, Dにある場合も同様に考えて

$$a_4=\frac{29}{375}+\frac{29}{375}+\frac{29}{375}=\frac{29}{125}$$ …[答]

高松高等予備校

[3]

(1)　$f(x)=(a^2+1)x^2+4ax$

について

$$f(x)=(a^2+1)\left(x+\frac{2a}{a^2+1}\right)^2-\frac{4a^2}{a^2+1} \quad \cdots ①$$

だから，すべての実数 x について $f(x)>-2$ が成り立つ条件は

$$-\frac{4a^2}{a^2+1}>-2 \quad \cdots ②$$

$a^2+1>0$ だから②は

$$4a^2<2(a^2+1)$$

$$\Leftrightarrow\ a^2<1$$

となる。これより $-1<a<1$ …[答]

(2)　$\dfrac{2a}{a^2+1}=t$

とおくと

ⅰ) $a=0$ のとき $t=0$

ⅱ) $a\fallingdotseq 0$ とする。 $t\fallingdotseq 0$ だから

$$ta^2+t=2a$$

$$\Leftrightarrow ta^2-2a+t=0$$

a は実数ゆえ，判別式をDとして

$$\frac{D}{4}=1-t^2\geqq 0$$

これより　$-1\leqq t\leqq 1$ $(t\fallingdotseq 0)$

ⅰ)，ⅱ) より　$-1\leqq t\leqq 1$ …[証明終]

(3)　(2) より　$-1\leqq\dfrac{2a}{a^2+1}\leqq 1$

これと①より

$$\begin{cases} n\leqq -1 \text{のとき } f(n)\geqq f(-1) \\ n\geqq 1 \text{のとき } f(n)\geqq f(1) \end{cases}$$

だから　$f(n)$ の最小値は　$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ のいずれかである。

よって，すべての整数 n に対して $f(n)>-2$ となる条件は

$$\begin{cases} f(-1)>-2 \\ f(0)>-2 \\ f(1)>-2 \end{cases}$$

すなわち

$$
③\begin{cases} a^2+1-4a>-2 & \cdots ア \\ 0>-2 & \cdots イ \\ a^2+1+4a>-2 & \cdots ウ \end{cases}
$$

が成り立つことであるが，イは明らかだから，③は

$$
\begin{cases} a^2-4a+3=(a-1)(a-3)>0 & \cdots ア \\ a^2+4a+3=(a+1)(a+3)>0 & \cdots ウ \end{cases}
$$

が成り立つことであり，これを解いて

$a<-3,\ -1<a<1,\ 3<a$ …[答]

である。

高松高等予備校

[4]

$f(x)=8^x+4^x+4^{-x}+8^{-x}$

(1)　$t=2^x+2^{-x}$　　…①

①の両辺を2乗すると

$t^2=4^x+2+4^{-x}$

$\therefore\quad 4^x+4^{-x}=t^2-2$　…[答]

①の両辺を3乗すると

$t^3=8^x+3(2^x+2^{-x})+8^{-x}$

$=8^x+3t+8^{-x}$

$\therefore\quad 8^x+8^{-x}=t^3-3t$　…[答]

(2)　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから相加平均と相乗平均の関係より

$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$ (等号は $2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき)

よって　$t\geqq 2$　…[答]

(3)　(1)より

$f(x)=(t^3-3t)+(t^2-2)$

$=t^3+t^2-3t-2$

ここで

$g(t)=t^3+t^2-3t-2\ (t\geqq 2)$ とおく。

$g'(t)=3t^2+2t-3$

$=3\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{10}{3}$

$t\geqq 2$ より $g'(t)>0$

よって，$t\geqq 2$ のとき $g(t)$ は単調増加

したがって，$t=2$ のとき最小値 $g(2)=4$ をとる。　…[答]

$2^x+\dfrac{1}{2^x}=2$ より，$(2^x)^2-2\cdot 2^x+1=0$

$(2^x-1)^2=0$ より，$2^x=1$

$x=0$　…[答]

高松高等予備校

[5]

$f(x)=\sin 2x+2\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$

(1)　$f(0)=f(\pi)=0$ であり

$0<x<\pi$ において

$f'(x)=2\cos 2x+2\cos x=2(2\cos^2 x-1)+2\cos x$

$=2(2\cos^2 x+\cos x-1)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$

$0<x<\pi$ において $f'(x)=0$ となるのは

$\cos x=\dfrac{1}{2}$ すなわち $x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$	0

$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大となる

最大値は $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{2}{3}\pi+2\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　…[答]

(2)　(1) の増減表より $0\leqq x\leqq\pi$ において $f(x)\geqq 0$ となっているから

求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\pi}(\sin 2x+2\sin x)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-2\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}\cos 2\pi-2\cos\pi+\frac{1}{2}\cos 0+2\cos 0$$

$$=-\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}+2$$

$$=4$$　…[答]

高松高等予備校