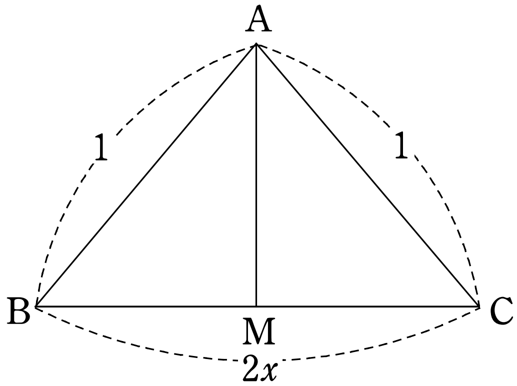
数学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B）

$\boxed{1}$

(1)



$\triangle$ABCとし，AB＝AC＝1，BC＝$2x$とする。

BCの中点をMとすると，AM⊥BCより

$$\mathrm{AM}=\sqrt{1-x^2}$$

よって　$\sin\angle\mathrm{ABM}=\sqrt{1-x^2}$

正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABM}}=2R$$

$$R=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$ …[答]

また，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\sqrt{1-x^2}$$
$$=x\sqrt{1-x^2}$$

内心をIとすると，$\triangle$ICA＋$\triangle$IAB＋$\triangle$IBC＝$\triangle$ABCより

$$\frac{1+1+2x}{2}\cdot r=x\sqrt{1-x^2}$$

$$r=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}$$ …[答]

(2)　$$\frac{r}{R}=\frac{2x(1-x^2)}{1+x}$$
$$=2x(1-x)$$
$$=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$0<x<1$ より

$\dfrac{r}{R}$ は $x=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値$\dfrac{1}{2}$ をとる。 …[答]

高松高等予備校

$\boxed{2}$

a，b は正の数，$x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+2}=\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}$

(1)　$x_3=\dfrac{1+x_2}{x_1}=\dfrac{1+b}{a}$，$x_4=\dfrac{1+x_3}{x_2}=\dfrac{1+\dfrac{1+b}{a}}{b}=\dfrac{a+b+1}{ab}$，

$$x_5=\frac{1+x_4}{x_3}=\frac{1+\dfrac{a+b+1}{ab}}{\dfrac{b+1}{a}}=\frac{ab+a+b+1}{b(b+1)}=\frac{(a+1)(b+1)}{b(b+1)}=\frac{a+1}{b},$$

$$x_6=\frac{1+x_5}{x_4}=\frac{1+\dfrac{a+1}{b}}{\dfrac{a+b+1}{ab}}=\frac{ab+a(a+1)}{a+b+1}=\frac{a(a+b+1)}{a+b+1}=a$$ …[答]

$$x_7=\frac{1+x_6}{x_5}=\frac{1+a}{\dfrac{a+1}{b}}=b$$ …[答]

(2)　$a=2$ のとき $x_1=2$，　$x_2=b$，　$x_3=\dfrac{1+b}{2}$，　$x_4=\dfrac{b+3}{2b}$，　$x_5=\dfrac{3}{b}$，

$x_6=2$，　$x_7=b$，$\{x_n\}$は x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 を繰り返す。

x_n がすべて自然数のとき

$x_2=b$ から b は自然数，　$x_5=\dfrac{3}{b}$ は自然数より b は 3 の約数から

$b=1$，3

$b=1$ のとき $x_3=1$，$x_4=2$ となり適する。

$b=3$ のとき $x_3=2$，$x_4=1$ となり適する。

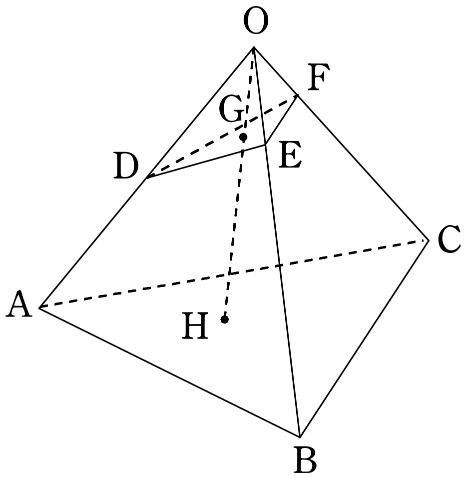
以上のことから $a=2$ のとき $b=1$，3

逆に $a=2$ のとき $b=1$, 3 とすると x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 は自然数となり $x_n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ はすべて自然数となるから適する。

したがって　$b=1$, 3 …[答]

高松高等予備校

$\boxed{3}$



(1) $$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{3}$$

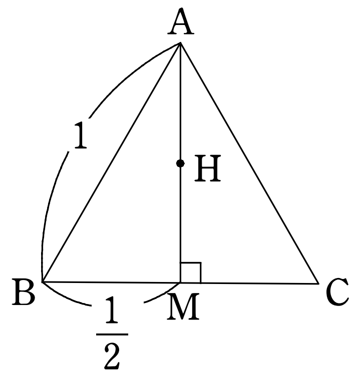
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{12}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{OC}$$ …[答]

(2) $$\overrightarrow{OG}=\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{12}$$

$$=\frac{4}{12}\cdot\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{4}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{4}$$



よって

$$\overrightarrow{OH}=\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{4}$$

$$4\overrightarrow{OH}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$4\left(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AO}\right)=-2\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AH}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$$

BC の中点をM とすると

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\mathrm{AM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$ …[答]

高松高等予備校

$\boxed{4}$

$C:\ y=2x^2+4x+3$

$L:\ y=-2ax-a^2$

(1) $2x^2+4x+3=-2ax-a^2$

$2x^2+2(a+2)x+a^2+3=0$ ……①

① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a+2)^2-2(a^2+3)>0$$

$$a^2-4a+2<0$$

$$2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}$$ …[答]

(2) ①の 2 つの実数解を α，$\beta\,(\alpha<\beta)$ とおくと，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-(a+2)\\ \alpha\beta=\dfrac{a^2+3}{2}\end{cases}$$

$$S=\int_\alpha^\beta\{-2ax-a^2-(2x^2+4x+3)\}dx$$

$$=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

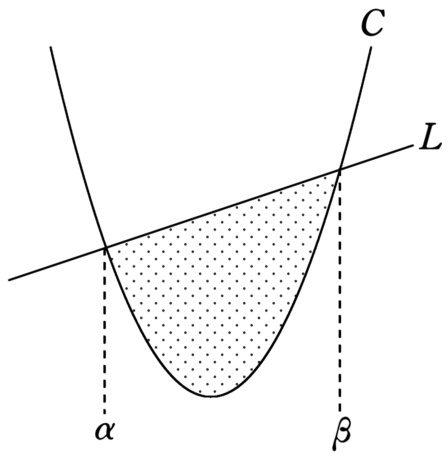
$$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{3}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\{(a+2)^2-2(a^2+3)\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}(-a^2+4a-2)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\{-(a-2)^2+2\}^{\frac{3}{2}}$$



よって $a=2$ のとき最大値 $\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ をとる。 …[答]

高松高等予備校