数学201 その1

(1)　$S_1=a_1$ より $n=1$ とすると

$$S_1=1+3+2=6 \qquad \therefore \quad a_1=6$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2+3n+2-\{(n-1)^2+3(n-1)+2\} \\ &= 2n+2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_n=\begin{cases} 6 & (n=1) \\ 2n+2 & (n \geqq 2) \end{cases}$$ …[答]

(2)　$S_n=(n+1)(n+2)$ より

$$\begin{aligned} \frac{S_nS_{n+2}}{S_{n+1}} &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+2)(n+3)} \\ &= (n+1)(n+4) \\ &= n^2+5n+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{S_kS_{k+2}}{S_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+5k+4) \\ &= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+\frac{5}{2}n(n+1)+4n \\ &= \frac{n}{3}(n+4)(n+5) \end{aligned}$$ …[答]

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{3k+1}}{S_{3k}S_{3k+2}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(3k+2)(3k+3)}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)(3k+4)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right) \\ &= \frac{n}{4(3n+4)} \end{aligned}$$ …[答]

高松高等予備校

数学201その2

(1)　与式から

$$f(4)=4^2(4^2+8)=2^7\cdot 3$$

だから，求める個数は

$$(7+1)(1+1)=16$$

よって　16個　…[答]

(2)　$f(n)=n^2(n^2+8)=n^2(n^2-1+9)$

$$=(n-1)n^2(n+1)+9n^2$$

ここで，$(n-1)$, n, $(n+1)$ のうち1つだけは3の倍数であり，$9n^2$ も3の倍数だから，$f(n)$ は3で割り切れる。　…[証明終]

(3)　題意より p，q を異なる素数，a，b を $a \leqq b$ なる正の整数として

$$f(n)=n^2(n^2+8)=p^a q^b \quad \cdots①$$

と素因数分解されて

$$(a+1)(b+1)=10 \quad \cdots②$$

である。②と a, b が $1 \leqq a \leqq b$ なる整数より

$$(a,\ b)=(1,\ 4)$$

のみ適する。これと①から

$$f(n)=n^2(n^2+8)=pq^4$$

である。(2)より，p，q のうち1つは3であるから，n または (n^2+8) が3で割り切れる。

ⅰ) $p=3$ のとき　ア $\begin{cases} n^2+8=3q^2 \\ n^2=q^2 \end{cases}$　イ $\begin{cases} n^2+8=3q^4 \\ n^2=1 \end{cases}$

のいずれかに限るが，イは不適だから

$$8=2q^2$$

これより $n=q=2$

ⅱ) $q=3$ とする。n が3の倍数でないと仮定すると，$n=1$ は $3^2=81p$ となって不適だから，$n=p$ となるが，これは p^2 が p の約数となり不適。

したがって，n は3で割り切れる。

$n=3a$ (aは自然数)

と表せるから

$$9a^2(9a^2+8)=81p$$

$$\Leftrightarrow a^2(9a^2+8)=9p$$

$9a^2+8$ は9と互いに素だから，a が3で割り切れ $a=3b$ (b は自然

数)と表される。よって

$$b^2(81b^2+8)=p$$

p は素数ゆえ

$$b=1$$

である他はなく，$p=89$

これは適する。

ゆえに　$n=2$，9 …[答]

高松高等予備校

数学 201 その 3

(1) $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2=(2\sqrt{11})^2$

$|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=44$

$6^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4^2=44$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$ …[答]

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2&=|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2\\
&=6^2+2\cdot4+4^2\\
&=60
\end{aligned}
$$

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=2\sqrt{15}$ …[答]

(2)

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}|^2&=|\overrightarrow{OA}|^2+2t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t^2|\overrightarrow{OB}|^2\\
&=16t^2+8t+36\\
&=16\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+35
\end{aligned}
$$

したがって，$|\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}|^2$ の最小値は $t=-\dfrac{1}{4}$ のとき 35

以上より $|\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}|$ の最小値は $t=-\dfrac{1}{4}$ すなわち

$t_1=-\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\sqrt{35}$ …[答]

(3) $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$

(1)より

$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{15}$

また

$$|\overrightarrow{OD}|=\left|\overrightarrow{OA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}\right|$$

(2)より

$|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{35}$

さらに

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}\right)\\
&=|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{1}{4}|\overrightarrow{OB}|^2\\
&=36+\frac{3}{4}\cdot4-\frac{1}{4}\cdot16
\end{aligned}
$$

$$=35$$

したがって，　$\triangle \mathrm{OCD}$ の面積は

$$\triangle \mathrm{OCD}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{60\cdot 35-35^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{35(60-35)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{35\cdot 25}$$

$$=\frac{5}{2}\sqrt{35}$$

…[答]

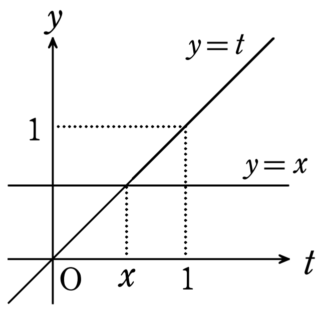
高松高等予備校

数学 201 その 4

$$\frac{1}{2}<\alpha<1\ ,\ \ a_1=\alpha\ ,\ \ a_{n+1}=2\int_0^1|t-a_n|dt\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$0<x<1$ のとき

$$\int_0^1|t-x|dt=\int_0^x(-t+x)dt+\int_x^1(t-x)dt$$
$$=\left[-\frac{t^2}{2}+xt\right]_0^x+\left[\frac{t^2}{2}-xt\right]_x^1$$
$$=2\left(-\frac{x^2}{2}+x^2\right)+\frac{1}{2}-x$$
$$=x^2-x+\frac{1}{2}$$



…[終]

(2)　$\dfrac{1}{2}<a_n<1$　…(∗) とおき，(∗) がすべての自然数 n に対して成り立つことを数学的帰納法で示す。

[1]　$n=1$ のとき $a_1=\alpha$， $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ より $\dfrac{1}{2}<a_1<1$ となり

(∗)は $n=1$ のとき成り立つ

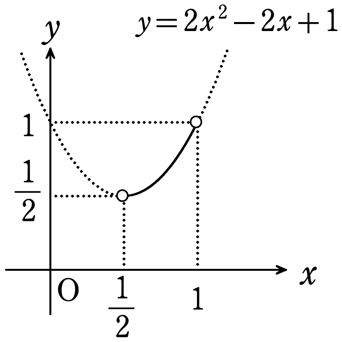
[2]　$n=k$ のとき(∗)が成り立つと仮定する。すなわち $\dfrac{1}{2}<a_k<1$

とすると (1) の結果より

$$a_{k+1}=2\int_0^1|t-a_k|dt=2\left({a_k}^2-a_k+\frac{1}{2}\right)=2{a_k}^2-2a_k+1$$
$$=2({a_k}^2-a_k)+1=2\left\{\left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+1$$
$$=2\left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

これと $\dfrac{1}{2}<a_k<1$ より

$\dfrac{1}{2}<a_{k+1}<1$ となり(∗)は $n=k+1$ のときも成り立つ



[1]，[2]より(∗)はすべての自然数 n に対して成り立つ　…[証明終]

(3)　(2)より $\dfrac{1}{2}<a_n<1$ のとき $a_{n+1}=2{a_n}^2-2a_n+1$

$\Longleftrightarrow a_{n+1}-\frac{1}{2}=2\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2$

$\frac{1}{2}<a_n<1$ から $a_n-\frac{1}{2}>0$ より

両辺の自然対数をとると

$\log\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}\right)=\log 2+2\log\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$

だから

$b_{n+1}=2b_n+\log 2$

これは $b_{n+1}+\log 2=2(b_n+\log 2)$ と変形できるから

数列 $\{b_n+\log 2\}$ は初項 $b_1+\log 2=\log\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+\log 2=\log(2\alpha-1)$

公比 2 の等比数列である。よって

$b_n+\log 2=2^{n-1}\log(2\alpha-1)$

だから $b_n=2^{n-1}\log(2\alpha-1)-\log 2$ …[答]

(4) $\frac{1}{2}<\alpha<1$ であるから $0<2\alpha-1<1$

ゆえに $\log(2\alpha-1)<0$

これと (3) の結果より $\lim_{n\to\infty} b_n=-\infty$ このとき $\lim_{n\to\infty} e^{b_n}=0$

ゆえに $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty} e^{b_n}=0$

だから, $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$ …[答]

高松高等予備校