数学 202 その1

(1)　与式から

$$f(4)=4^2(4^2+8)=2^7\cdot 3$$

だから，求める個数は

$$(7+1)(1+1)=16$$

よって　16個　…[答]

(2)　$f(n)=n^2(n^2+8)=n^2(n^2-1+9)$

$$=(n-1)n^2(n+1)+9n^2$$

ここで，$(n-1)$, n, $(n+1)$ のうち 1 つだけは 3 の倍数であり，$9n^2$ も 3 の倍数だから，$f(n)$ は 3 で割り切れる。　…[証明終]

(3)　$10=2\times 5$

だから，$f(x)$ が 3 つ以上の異なる素数 p, q, r, … で割り切れると仮定すると $f(n)$ の正の約数の個数は 2 以上の整数を 3 つ以上かけたものとなり不適。よって，$f(x)$ の異なる素因数は高々 2 個である。

題意より　p，qを異なる素数，a，bを $a\leqq b$ なる自然数として

Ⅰ］　$f(n)=n^2(n^2+8)=p^9$ (p は素数)　のとき

(2)より $p=3$ だから

$$n^2(n^2+8)=3^9$$

ⅰ) n が 3 で割り切れないとき $n=1$ より

$$9=3^9$$

となり，不適。

ⅱ) n が3で割り切れるとき

n^2+8 は17以上で，3で割り切れないから，$f(n)$ は 3 以外の素因数をもつので不適。

Ⅱ］　$f(n)=n^2(n^2+8)=p^aq^b$ (p，q は異なる素数，a，b は $a\leqq b$ なる自然数) のとき

$$(a+1)(b+1)=10$$

より　$(a,\ b)=(1,\ 4)$

である他はなく，p，q のうち 1 つは 3 だから

ⅰ) $p=3$ のとき

n は 3 の倍数であってはならないから

ア　$n=1$　イ　$n=q$　ウ　$n=q^2$

のいずれかである。

アのとき

$$9=3q^4 \Leftrightarrow q^4=3$$

となり，不適。

イのとき

$$q^2(q^2+8)=3q^4$$

から　$q^2+8=3q^2$

$$\Leftrightarrow q=2$$

となり，適する。

ウのとき

$$q^4(q^4+8)=3q^4$$

から　$q^4+8=3$

となり，不適。

ⅱ) $q=3$ とする。n は p で割り切れず，$n=1$ は不適だから，

$n=3a$ (aは自然数)

と表され，このとき

$$a^2(9a^2+8)=9p$$

$9a^2+8$ は 9 と互いに素だから

$$a=3$$

このとき，$n=9$，$p=89$

となり，適する。

Ⅰ]，Ⅱ]より $n=2$，9　…[答]

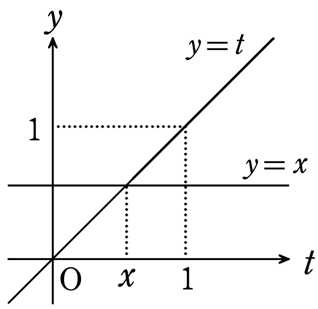
高松高等予備校

数学 202 その 2

$\frac{1}{2}<\alpha<1$，$a_1=\alpha$，$a_{n+1}=2\int_0^1|t-a_n|dt$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1)　$0<x<1$ のとき

$$\int_0^1|t-x|dt=\int_0^x(-t+x)dt+\int_x^1(t-x)dt$$
$$=\left[-\frac{t^2}{2}+xt\right]_0^x+\left[\frac{t^2}{2}-xt\right]_x^1$$
$$=2\left(-\frac{x^2}{2}+x^2\right)+\frac{1}{2}-x$$
$$=x^2-x+\frac{1}{2}$$



…[終]

(2)　$\frac{1}{2}<a_n<1$　…(*) とおき，(*) がすべての自然数 n に対して成り立つことを数学的帰納法で示す。

[1]　$n=1$ のとき $a_1=\alpha$，$\frac{1}{2}<\alpha<1$ より $\frac{1}{2}<a_1<1$ となり

(*)は $n=1$ のとき成り立つ

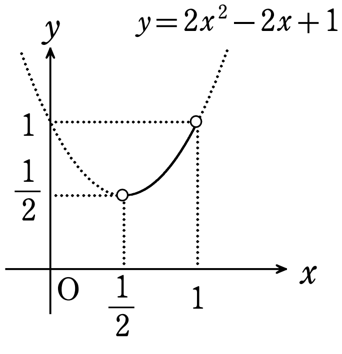
[2]　$n=k$ のとき(*)が成り立つと仮定する。すなわち $\frac{1}{2}<a_k<1$

とすると (1) の結果より

$$a_{k+1}=2\int_0^1|t-a_k|dt=2\left({a_k}^2-a_k+\frac{1}{2}\right)=2{a_k}^2-2a_k+1$$
$$=2({a_k}^2-a_k)+1=2\left\{\left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+1$$
$$=2\left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

これと $\frac{1}{2}<a_k<1$ より

$\frac{1}{2}<a_{k+1}<1$ となり(*)は $n=k+1$ のときも成り立つ



[1]，[2]より(*)はすべての自然数 n に対して成り立つ　…[証明終]

(3)　(2)より $\frac{1}{2}<a_n<1$ のとき $a_{n+1}=2{a_n}^2-2a_n+1$

$\Leftrightarrow a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=2\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)^2$

$\dfrac{1}{2}<a_n<1$ から $a_n-\dfrac{1}{2}>0$ より

両辺の自然対数をとると

$\log\left(a_{n+1}-\dfrac{1}{2}\right)=\log 2+2\log\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)$

だから

$b_{n+1}=2b_n+\log 2$

これは $b_{n+1}+\log 2=2(b_n+\log 2)$ と変形できるから

数列 $\{b_n+\log 2\}$ は初項 $b_1+\log 2=\log\left(\alpha-\dfrac{1}{2}\right)+\log 2=\log(2\alpha-1)$

公比 2 の等比数列である。よって

$b_n+\log 2=2^{n-1}\log(2\alpha-1)$

だから $b_n=2^{n-1}\log(2\alpha-1)-\log 2$ …[答]

(4) $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ であるから $0<2\alpha-1<1$

ゆえに $\log(2\alpha-1)<0$

これと (3) の結果より $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\infty$ このとき $\lim\limits_{n\to\infty}e^{b_n}=0$

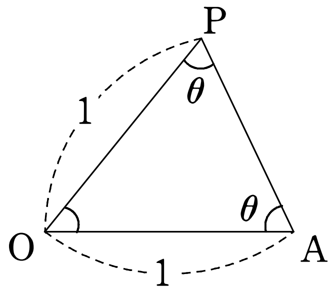
ゆえに $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{b_n}=0$

だから, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$ …[答]

高松高等予備校

数学 202 その 3

(1)



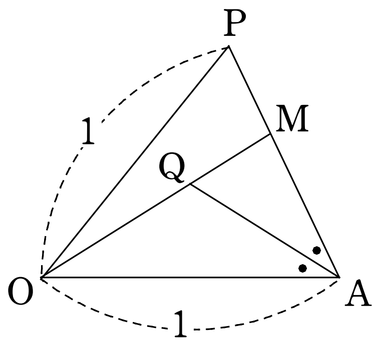
$\angle \mathrm{AOP}=\pi-2\theta$ より点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について

$$x=\cos(\pi-2\theta)=-\cos 2\theta$$

$$y=\sin(\pi-2\theta)=\sin 2\theta$$

よって　$\mathrm{P}(-\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ …[答]

(2)



$\mathrm{AP}=2\cos\theta$ より

$$\mathrm{AM}=\mathrm{AP}\cos\theta$$

$$=2\cos^2\theta$$

角の二等分線の性質より

$$\mathrm{OQ}:\mathrm{QM}=\mathrm{OA}:\mathrm{AM}$$

$$=1:2\cos^2\theta$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{1+2\cos^2\theta}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

ここで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}&=(1-\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=(1-\cos\theta,\ 0)+(-\cos\theta\cos 2\theta,\ \sin 2\theta\cos\theta)\\&=(1-\cos\theta-\cos\theta\cos 2\theta,\ \sin 2\theta\cos\theta)\\&=(1-\cos\theta(1+\cos 2\theta),\ \sin 2\theta\cos\theta)\\&=(1-2\cos^3\theta,\ 2\sin\theta\cos^2\theta)\end{aligned}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\dfrac{1-2\cos^3\theta}{1+2\cos^2\theta},\ \dfrac{2\sin\theta\cos^2\theta}{1+2\cos^2\theta}\right)$

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1-2\cos^3\theta}{1+2\cos^2\theta},\ \dfrac{2\sin\theta\cos^2\theta}{1+2\cos^2\theta}\right)$ …[答]

(3)　△OAQ の面積を S とおくと

$$S=\frac{1}{2}\times\mathrm{OA}\times(\text{Qの }y\text{ 座標})$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2\sin\theta\cos^2\theta}{1+2\cos^2\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{1+2\cos^2\theta}$$

$\sin\theta=t$ とおくと

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $0<t<1$であって

$$S=\frac{t(1-t^2)}{1+2(1-t^2)}=\frac{t-t^3}{3-2t^2}$$
$$S'=\frac{(2t^2-1)(t^2-3)}{(3-2t^2)^2}$$

$0<t^2<1$ より $S'=0$ のとき $t^2=\frac{1}{2}$

$0<t<1$ より $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

となる。

よって $t=\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

すなわち $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき S は最大値 $\frac{\sqrt{2}}{8}$ をとる。

したがって $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき △OAQ の面積の最大値は $\frac{\sqrt{2}}{8}$　　　…[答]

数学 202 その 4

(1)　２回投げた後 (1,0) にあるのは

右→止または止→右

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

２回投げた後 (1,1) にあるのは

右→上または上→右

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{18}$$

２回投げた後 (2,0) にあるのは

右→右

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$$

２回投げた後 (0,0) にある確率を P とすると，対称性から

$$P+4\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\right)=1$$

$$P=\frac{1}{3}$$

…[答]

(2)　２回投げた後 (1,0) にあり，３回目に原点に戻るのは

３回目に 3 または 6 の目が出ればよいので，確率は

$$\frac{1}{12}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{36}$$

２回投げた後 (1,1) にあり，３回目に原点に戻るのは

３回目に 6 の目が出ればよいので，確率は

$$\frac{1}{18}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{108}$$

２回投げた後 (2,0) にあり，３回目に原点に戻るのは

３回目に 6 の目が出ればよいので，確率は

$$\frac{1}{36}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$$

２回投げた後 (0,0) にあり，３回目に原点に戻るのは

３回目に 5 または 6 の目が出ればよいので，確率は

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$$

以上より求める確率は対称性から

$$\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{108}+\frac{1}{216}\right)\times4+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}$$

…[答]

(3)　(ア) 3 回目に (1,0) にあるのは

止止右，止右止，右止止，右右左，右$\boxed{\text{左}}$右，左$\boxed{\text{右}}$右，

上$\boxed{\text{下}}$右，上右下，右上下，下$\boxed{\text{上}}$右，下右上，右下上

（□の場合は２通りの場合がある）

となるので確率は

$$\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$$

$$+\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}$$

$$+\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$+\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{20}{6^3}$$

このとき 4 回目に原点に戻るのは，６回目に 3 または6 の目が出ればよいので

$$\frac{20}{6^3}\times\frac{2}{6}=\frac{40}{6^4}$$

(イ) 3 回目に (1,1) にあるのは

止右上，右止上，右上止，止上右，上止右，上右止

となるので確率は

$$\left\{\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^3\right\}\times 2=\frac{8}{6^3}$$

このとき 4 回目に原点に戻るのは，６回目に 6 の目が出ればよいので

$$\frac{8}{6^3}\times\frac{1}{6}=\frac{8}{6^4}$$

(ウ) 3 回目に (2,0) にあるのは

止右右，右止右，右右止

となるので確率は

$$\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{4}{6^3}$$

このとき 4 回目に原点に戻るのは，６回目に 6 の目が出ればよいので

$$\frac{4}{6^3}\times\frac{1}{6}=\frac{4}{6^4}$$

(エ) 3 回目に (2,1) にあるのは

上右右，右上右，右右上

となるので確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{3}{6^3}$$

このとき４回目に原点に戻るのは，６回目に6の目が出ればよいので

$$\frac{3}{6^3}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{6^4}$$

３回目に (1,2) にある場合も同様に考えて

$$\frac{3}{6^4}+\frac{3}{6^4}=\frac{6}{6^4}$$

(オ)３回目に (3,0) にあるのは

右右右

となるので確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{6^3}$$

このとき４回目に原点に戻るのは，６回目に6の目が出ればよいので

$$\frac{1}{6^3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6^4}$$

(カ)３回目に原点にあるのは(2)より

$$\frac{5}{18}$$

このとき４回目に原点に戻るのは，６回目に5または6の目が出ればよいので

$$\frac{5}{18}\times\frac{2}{6}=\frac{120}{6^4}$$

(ア)～(カ)より求める確率は対称性から

$$\left(\frac{40}{6^4}+\frac{8}{6^4}+\frac{4}{6^4}+\frac{6}{6^4}+\frac{1}{6^4}\right)\times4+\frac{120}{6^4}$$

$$=\frac{356}{6^4}$$

$$=\frac{89}{324}$$

…[答]

高松高等予備校