2006　香川大学　工学部
数学入試問題

〔1〕 1辺の長さが1の正五角形 OABCD に対して，$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OD}$ とおく。
BD の長さを x とするとき，次の問に答えよ。

1. $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{AB}$ を x, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ を用いて表せ。
2. 内積 $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ の値を x を用いて表せ。
3. x の値を求めよ。
4. $\cos 72^\circ$ の値を求めよ。

〔2〕 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

n の正の約数の個数が偶数ならば，$a_n = 0$

n の正の約数の個数が奇数ならば，$a_n = n$

このとき，次の問に答えよ。

1. a_4, a_6, a_8 の値を求めよ。
2. $a_n = n$ となるような n はどのような数であるかを答えよ。
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{150} a_k$ を求めよ。
4. $\displaystyle 650 \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k \leqq 1496$ となるような n の範囲を求めよ。

〔3〕 次の問に答えよ。ただし，k は正の整数とする。

1. 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ は，下に凸であることを示せ。
2. 定積分 $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\,dx$ を求めよ。
3. 2直線 $x=k-\dfrac{1}{2}$, $x=k+\dfrac{1}{2}$ と曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\left(k, \dfrac{1}{k}\right)$ における接線，および x 軸によって囲まれた台形の面積を求めよ。
4. 次の不等式を証明せよ。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \log(2n+1)$$

〔4 A〕 △ABCの辺BC，CA，ABの中点をそれぞれL，M，Nとする。△PQRは3つの中線AL，BM，CNからつくられた三角形で，PQ = AL，QR = BM，RP = CN をみたしているとする。このとき，次の問に答えよ。

1. 中線ALとBMの交点をGとし，CGの中点をKとする。△ABCと△GLKの面積の比を求めよ。
2. △GLKと△PQRの面積の比を求めよ。
3. △ABCと△PQRの面積の比を求めよ。

〔4 B〕 複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数) と実数 m に対して，直線 ℓ と曲線 C が

$$\ell : (m + i)z + (m - i)\bar{z} = 6m$$

$$C : |z - 3| = 2|z|$$

で与えられている。ただし，$\bar{z}$ は z に共役な複素数 $x - yi$ を表す。

このとき，次の問に答えよ。

1. 直線 ℓ および曲線 C のみたす方程式をそれぞれ x，y を用いて表せ。
2. m が実数の範囲で変化するとき，直線 ℓ と曲線 C の共通点の個数はどのようになるかを答えよ。
3. 直線 ℓ と曲線 C が2つの共通点をもつとき，それらの2つの点の中点の軌跡の方程式を求め，その軌跡を図示せよ。