〔1〕

1． △OAD は OA＝OD の二等辺三角形でOEは∠AODの二等分線である。
∴ EはADの中点である。

$$\therefore \overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

…(答)

2． FはOE上にあるから実数 k を用いて

$\overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{OB}$ と表される。

一方Fは直線AB上の点で，$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$は1次独立だから，

$$\frac{1}{2}k+\frac{1}{3}k=1 \qquad \therefore k=\frac{6}{5}$$

$$\therefore \overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}\overrightarrow{OB}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

…(答)

3． 2．より，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}=-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

…(答)

4．
$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

また 3．より，

$$\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})-\frac{2}{5}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\frac{1}{10}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{5}\overrightarrow{AM}$$

$$\therefore |\overrightarrow{FM}|=\frac{1}{5}|\overrightarrow{AM}|$$

$$\therefore \frac{AM}{FM}=5$$

…(答)

[2]

1．与式から

$$a_n = a_{n+1}^{\frac{n+2}{n}}$$

から，$a_{n+1} = a_n^{\frac{n}{n+2}} \quad \cdots ①$

だから，$a_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ より

$$\begin{cases} a_2 = a_1^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} \\ a_3 = a_2^{\frac{2}{4}} = \left(2^{\frac{1}{2\cdot3}}\right)^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{12}} \\ a_4 = a_3^{\frac{3}{5}} = \left(2^{\frac{1}{3\cdot4}}\right)^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{1}{20}} \end{cases} \quad \cdots (答)$$

2．$a_n = 2^{\frac{1}{n(n+1)}} \cdots (*)$

と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ より (*) は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき (*) が成り立つと仮定すると

$$a_k = 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$$

①より

$$a_{k+1} = a_k^{\frac{k}{k+2}}$$

$$= \left(2^{\frac{1}{k(k+1)}}\right)^{\frac{k}{k+2}}$$

$$= 2^{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$

よって $n=k+1$ のときも (*) は成り立つ。

以上より，任意の自然数 n に対して，(*) は成り立つ。

(証明終)

3．2.の結果より

$$\begin{aligned}\log_2 A_n &= \log_2(a_1a_2\cdots a_n)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\log_2 a_k\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= 1-\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

$\therefore A_n = 2^{\frac{n}{n+1}}$ $\cdots$(答)

4．3.の結果より

$$A_n < 5^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \log_2 A_n < \frac{1}{3}\log_2 5$$

$c=\log_{10}2$ として

$$\frac{n}{n+1} < \frac{1}{3}\left(\frac{1-c}{c}\right) \Leftrightarrow (4c-1)n < 1-c$$

$c=0.3010$ より

$$0.2040n < 0.6990$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{699}{204} = 3+\frac{87}{204}$$

n は自然数ゆえ，求める最大値は

3 $\cdots$(答)

高松高等予備校

[3]

1．$C: y=\frac{1}{2}x^2$， $y'=x$ より

$$l_1: y=t(x-t)+\frac{1}{2}t^2=tx-\frac{1}{2}t^2 \quad \cdots(\text{答})$$

また上式で t を kt として

$$l_2: y=ktx-\frac{1}{2}k^2t^2 \quad \cdots(\text{答})$$

2．l_1 と l_2 が直交するとき

$$t\times kt=-1$$

$t>0$ より， $kt=-\frac{1}{t}$

よって $l_2: y=-\frac{1}{t}x-\frac{1}{2t^2}$

$tx-\frac{1}{2}t^2=-\frac{1}{t}x-\frac{1}{2t^2}$ とおくと

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)x=\frac{1}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)$$

$t+\frac{1}{t}\neq 0$ より

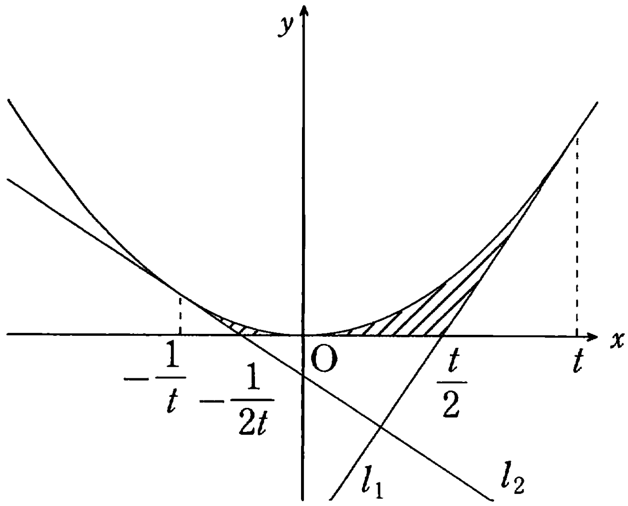
$$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

$$\therefore y=t\cdot\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{2}t^2=-\frac{1}{2}$$

∴交点は

$$\left(\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right), -\frac{1}{2}\right) \quad \cdots(\text{答})$$

3.



l_1 で $y=0$ とすれば $x=\frac{t}{2}$

l_2 で $y=0$ とすれば $x=-\frac{1}{2t}$

よって

$$S=\int_{-\frac{1}{t}}^{t}\frac{1}{2}x^2dx-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2t}+\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{2}\cdot\left(t-\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{t^2}{2}$$

$$=\left[\frac{x^3}{6}\right]_{-\frac{1}{t}}^{t}-\frac{1}{8t^3}-\frac{1}{8}t^3$$

$$=\frac{t^3}{6}+\frac{1}{6t^3}-\frac{1}{8t^3}-\frac{1}{8}t^3$$

$$=\frac{1}{24}\left(t^3+\frac{1}{t^3}\right)\quad\cdots(\text{答})$$

4. $t^3>0$, $\frac{1}{t^3}>0$ だから，相加平均と相乗平均の関係より

$$S\geqq\frac{1}{24}\cdot2\sqrt{t^3\cdot\frac{1}{t^3}}=\frac{1}{12}$$

等号は $t^3=\frac{1}{t^3}$ すなわち $t=1$ のとき成立する。

$\therefore t=1$ のとき最小値 $\frac{1}{12}$ $\cdots$(答)

高松高等予備校

〔4〕

1． 題意より　$a_n=2n-2$,

$$f_n(x)=-x^2+2(n-1)x+1$$
$$=-\{x-(n-1)\}^2+(n-1)^2+1$$

なので，$\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$ について

$$\begin{cases} x_n=n-1 \\ y_n=n^2-2n+2 \end{cases}$$

…(答)

2． 1．の考察より，つねに

$$y_n=x_n{}^2+1$$

なので求める2次関数 $g(x)$ は

$$y=x^2+1$$

…(答)

3． $g(x)=x^2+1$ が $x\geqq 0$ において単調増加

であることと，$y_k=g(k-1)$　(k は自然数)

より，
$$\begin{cases} y_k>g(x) & (k-2<x<k-1)\ (k\geqq 2\text{のとき}) \\ g(x)>y_k & (k-1<x<k)\qquad (k\geqq 1\text{のとき}) \end{cases}$$

それゆえ，$I_k=\int_{k-1}^{k} g(x)dx$ として，

$$\begin{cases} I_{k-1}=\int_{k-2}^{k-1} g(x)dx<\int_{k-2}^{k-1} y_k dx=y_k & (k\geqq 2\text{のとき}) \\ I_k\quad=\int_{k-1}^{k} g(x)dx>\int_{k-1}^{k} y_k dx=y_k & (k\geqq 1\text{のとき}) \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} y_k<\sum_{k=1}^{n} I_k=\int_0^n g(x)dx=S_n$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} y_k>\sum_{k=2}^{n+1} I_{k-1}=\sum_{k=1}^{n} I_k=S_n$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n} y_k<S_n<\sum_{k=2}^{n+1} y_k$$

(証明終)

4. $S_n=\int_0^n (x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^n=\frac{n^3}{3}+n$

$\sum_{k=2}^{n+1} y_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n$

$\sum_{k=1}^{n} y_k=\sum_{k=0}^{n-1}(k^2+1)=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+n$

だから,

$\sum_{k=2}^{n-1} y_k+\sum_{k=1}^{n} y_k-2S_n$

$=\frac{n(2n^2+3n+1+2n^2-3n+1)}{6}-\frac{2}{3}n^3$

$=\frac{n(2n^2+1-2n^2)}{3}$

$=\frac{n}{3}$

>0

$\therefore \sum_{k=2}^{n+1} y_k-S_n>S_n-\sum_{k=1}^{n} y_k$

…(答)

高松高等予備校