

[1]

1. $\triangle OAD$ は $OA=OD$ の二等辺三角形で OE は $\angle AOD$ の二等分線である。

$\therefore E$ は AD の中点である。

$$\therefore \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

…(答)

2. F は OE 上にあるから実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OF} = k\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}k\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}k\overrightarrow{OB} \text{ と表される。}$$

一方 F は直線 AB 上の点で、 \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} は 1 次独立だから、

$$\frac{1}{2}k + \frac{1}{3}k = 1 \quad \therefore k = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}\overrightarrow{OB} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

…(答)

3. 2. より, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} = -\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

…(答)

4. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$

また 3. より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) - \frac{2}{5}(\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{10}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{5}\overrightarrow{AM} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{FM}| = \frac{1}{5}|\overrightarrow{AM}|$$

$$\therefore \frac{AM}{FM} = 5$$

…(答)

[2]

1. 与式から

$$a_n = a_{n+1}^{\frac{n+2}{n}}$$

から, $a_{n+1} = a_n^{\frac{n}{n+2}} \dots \textcircled{1}$

だから, $a_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ より

$$\begin{cases} a_2 = a_1^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} \\ a_3 = a_2^{\frac{2}{4}} = \left(2^{\frac{1}{2 \cdot 3}}\right)^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{12}} \quad \dots (\text{答}) \\ a_4 = a_3^{\frac{3}{5}} = \left(2^{\frac{1}{3 \cdot 4}}\right)^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{1}{20}} \end{cases}$$

2. $a_n = 2^{\frac{1}{n(n+1)}} \dots (*)$

と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \text{ より } (*) \text{ は成り立つ。}$$

[2] $n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定すると

$$a_k = 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$$

①より

$$a_{k+1} = a_k^{\frac{k}{k+2}}$$

$$= \left(2^{\frac{1}{k(k+1)}}\right)^{\frac{k}{k+2}}$$

$$= 2^{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$

よって $n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ。

以上より, 任意の自然数 n に対して, $(*)$ は成り立つ。

(証明終)

3. 2. の結果より

$$\begin{aligned}\log_2 A_n &= \log_2(a_1 a_2 \cdots a_n) \\ &= \sum_{k=1}^n \log_2 a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

$$\therefore A_n = 2^{\frac{n}{n+1}} \quad \dots (\text{答})$$

4. 3. の結果より

$$A_n < 5^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \log_2 A_n < \frac{1}{3} \log_2 5$$

$c = \log_{10} 2$ として

$$\frac{n}{n+1} < \frac{1}{3} \left(\frac{1-c}{c} \right) \Leftrightarrow (4c-1)n < 1-c$$

$c = 0.3010$ より

$$0.2040n < 0.6990$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{699}{204} = 3 + \frac{87}{204}$$

n は自然数ゆえ、求める最大値は

$$3 \quad \dots (\text{答})$$

[3]

1. $C: y = \frac{1}{2}x^2$, $y' = x$ より

$$l_1: y = t(x-t) + \frac{1}{2}t^2 = tx - \frac{1}{2}t^2 \quad \dots (\text{答})$$

また上式で t を kt として

$$l_2: y = ktx - \frac{1}{2}k^2t^2 \quad \dots (\text{答})$$

2. l_1 と l_2 が直交するとき

$$t \times kt = -1$$

$$t > 0 \text{ より, } kt = -\frac{1}{t}$$

$$\text{よって } l_2: y = -\frac{1}{t}x - \frac{1}{2t^2}$$

$$tx - \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{t}x - \frac{1}{2t^2} \text{ とおくと}$$

$$\left(t + \frac{1}{t}\right)x = \frac{1}{2}\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)$$

$$t + \frac{1}{t} \neq 0 \text{ より}$$

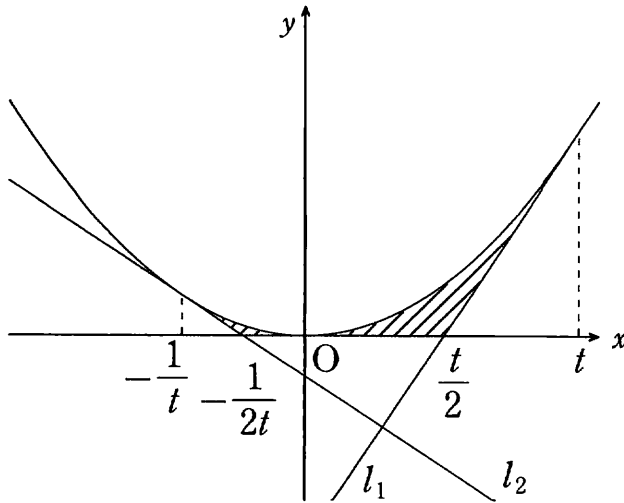
$$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

$$\therefore y = t \cdot \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{2}$$

\therefore 交点は

$$\left(\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), -\frac{1}{2}\right) \quad \dots (\text{答})$$

3.



$$l_1 \text{ で } y=0 \text{ とすれば } x = \frac{t}{2}$$

$$l_2 \text{ で } y=0 \text{ とすれば } x = -\frac{1}{2t}$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{t}}^t \frac{1}{2} x^2 dx - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2t} + \frac{1}{t} \right) \cdot \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2} \cdot \left(t - \frac{t}{2} \right) \cdot \frac{t^2}{2} \\ &= \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-\frac{1}{t}}^t - \frac{1}{8t^3} - \frac{1}{8} t^3 \\ &= \frac{t^3}{6} + \frac{1}{6t^3} - \frac{1}{8t^3} - \frac{1}{8} t^3 \\ &= \frac{1}{24} \left(t^3 + \frac{1}{t^3} \right) \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

4. $t^3 > 0$, $\frac{1}{t^3} > 0$ だから, 相加平均と相乗平均の関係より

$$S \geq \frac{1}{24} \cdot 2 \sqrt{t^3 \cdot \frac{1}{t^3}} = \frac{1}{12}$$

等号は $t^3 = \frac{1}{t^3}$ すなわち $t=1$ のとき成立する。

$$\therefore t=1 \text{ のとき最小値 } \frac{1}{12} \quad \dots(\text{答})$$

[4]

1. 題意より $a_n = 2n - 2$,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= -x^2 + 2(n-1)x + 1 \\ &= -\{x - (n-1)\}^2 + (n-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

なので, $P_n(x_n, y_n)$ について

$$\begin{cases} x_n = n - 1 \\ y_n = n^2 - 2n + 2 \end{cases}$$

…(答)

2. 1. の考察より, つねに

$$y_n = x_n^2 + 1$$

なので求める2次関数 $g(x)$ は

$$y = x^2 + 1$$

…(答)

3. $g(x) = x^2 + 1$ が $x \geq 0$ において単調増加

であることと, $y_k = g(k-1)$ (k は自然数)

$$\text{より, } \begin{cases} y_k > g(x) & (k-2 < x < k-1) \quad (k \geq 2 \text{ のとき}) \\ g(x) > y_k & (k-1 < x < k) \quad (k \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

それゆえ, $I_k = \int_{k-1}^k g(x) dx$ として,

$$\begin{cases} I_{k-1} = \int_{k-2}^{k-1} g(x) dx < \int_{k-2}^{k-1} y_k dx = y_k & (k \geq 2 \text{ のとき}) \\ I_k = \int_{k-1}^k g(x) dx > \int_{k-1}^k y_k dx = y_k & (k \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n y_k < \sum_{k=1}^n I_k = \int_0^n g(x) dx = S_n$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} y_k > \sum_{k=2}^{n+1} I_{k-1} = \sum_{k=1}^n I_k = S_n$$

よって

$$\sum_{k=1}^n y_k < S_n < \sum_{k=2}^{n+1} y_k$$

(証明終)

$$4. \quad S_n = \int_0^n (x^2 + 1) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 + x \right]_0^n = \frac{n^3}{3} + n$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} y_k = \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n$$

$$\sum_{k=1}^n y_k = \sum_{k=0}^{n-1} (k^2 + 1) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n$$

だから,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{n-1} y_k + \sum_{k=1}^n y_k - 2S_n \\ &= \frac{n(2n^2 + 3n + 1 + 2n^2 - 3n + 1)}{6} - \frac{2}{3}n^3 \\ &= \frac{n(2n^2 + 1 - 2n^2)}{3} \\ &= \frac{n}{3} \end{aligned}$$

> 0

$$\therefore \sum_{k=2}^{n+1} y_k - S_n > S_n - \sum_{k=1}^n y_k$$

…(答)

高松高等予備校

[5]

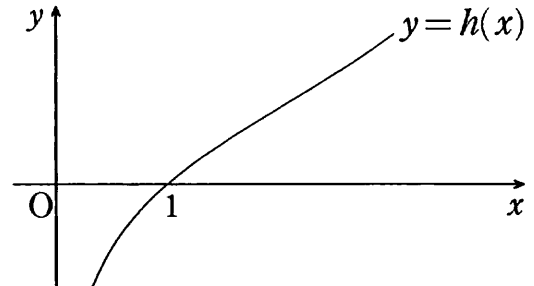
1.
$$h(x) = f(x) - g(x)$$
$$= x^3 + 48 \log x - e^{-x+1} \quad (x > 0)$$

とおく。

$$h'(x) = 3x^2 + \frac{48}{x} + e^{-x+1} > 0$$

$x > 0$ で $h(x)$ は単調増加 …①

$$h(1) = 1 + 0 - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$



①, ②より $h(x) = 0$ は $x > 0$ にただ1つの実数解をもつから, 2つの曲線はただ1つの交点をもつ。

(証明終)

2.
$$f(x) = x^3 + 48 \log x \quad (x > 0)$$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{48}{x}$$

$$f''(x) = 6x - \frac{48}{x^2} = \frac{6(x^3 - 8)}{x^2}$$

$f''(x) = 0$ より

$$x = 2$$

$x = 2$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わる。

$$f(2) = 8 + 48 \log 2$$

\therefore 変曲点 $(2, 8 + 48 \log 2)$ … (答)

高松高等予備校