〔1〕

1.　Gは△OABの重心だから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$$　…(答)

2.　Gは直線CD上の点であるから

$$\overrightarrow{OG}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}$$

なる実数 t が存在し，題意より

$$\overrightarrow{OG}=r(1-t)\vec{a}+st\vec{b}$$

1. の結果と，$\vec{a}$，$\vec{b}$ が1次独立であることより

$$r(1-t)=st=\frac{1}{3}$$

これより

$$1-t=\frac{1}{3r},\quad t=\frac{1}{3s}$$

よって

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3r}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3s}\overrightarrow{OD}$$　…(答)

3.　**2.** の考察より

$$\frac{1}{3r}+\frac{1}{3s}=1$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=3$$　…(答)

4.　題意より

$$(\triangle OCD)=r|s|(\triangle OAB)$$

だから

$$(\triangle OCD)=(\triangle OAB)$$

となる条件は

$$r|s|=1$$

これと **3.** の結果より

$$\pm r=3-\frac{1}{r}$$

$\Leftrightarrow\ r^2 \mp 3r \pm 1 = 0$ (複号同順)

$0 < r \leqq 1$ に注意して

$$r = \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \quad \cdots(答)$$

5． OC : CA = 3 : 1 のとき $r = \dfrac{3}{4}$

だから**3．**の結果より $s = \dfrac{3}{5}$

よって OD : DB = 3 : 2 …(答)

高松高等予備校

[2]

1．与えられた条件より

$a_3=3a_2-2a_1=3q-2p$ …(答)

$a_4=3a_3-2a_2=3(3q-2p)-2q=7q-6p$ …(答)

$a_5=3a_4-2a_3=3(7q-6p)-2(3q-2p)=15q-14p$ …(答)

$a_6=3a_5-2a_4=3(15q-14p)-2(7q-6p)=31q-30p$ …(答)

2．題意より

$$\begin{cases} b_{n+1}=2b_n \\ b_1=q-p \end{cases}$$

なので数列 $\{b_n\}$ は初項 $(q-p)$，公比 2 の等比数列である。

よって

$$\begin{cases} b_1=q-p \\ b_2=2(q-p) \\ b_3=4(q-p) \\ b_4=8(q-p) \end{cases}$$ …(答)

3．2．の考察から

$$b_n=a_{n+1}-a_n=2^{n-1}(q-p)$$

なので，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(q-p)\cdot 2^{k-1}$$
$$=(q-p)\cdot 2^{n-1}+2p-q$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

$\therefore\ a_n=(q-p)\cdot 2^{n-1}+2p-q$ …(答)

4．3．の考察から

$$a_n=(q-p)\cdot 2^{n-1}+2p-q$$

なので，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \{(q-p)\cdot 2^{k-1} + 2p - q\}$$

$$= \frac{2^n - 1}{2-1}(q-p) + (2p-q)n$$

$$= (q-p)\cdot 2^n + (2p-q)n + p - q \qquad \cdots(\text{答})$$

高松高等予備校

[3]

1．$C: y=\frac{1}{4}x^2$ 上の点$\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{4}t^2\right)$について

$$\mathrm{BP}^2=t^2+\left(\frac{1}{4}t^2-b\right)^2=\frac{1}{16}t^4+\left(1-\frac{1}{2}b\right)t^2+b^2$$

$$=\frac{1}{16}(t^2+8-4b)^2-4+4b \quad \cdots①$$

だから，題意のようになる条件は

$$\begin{cases} 4b-8>0 \\ 4b-4=r^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r>2 \\ b=\dfrac{r^2+4}{4} \end{cases}$$

このとき，①が最小値r^2をとるPがA_1，A_2であるから，題意より

$$\begin{cases} \mathrm{B}\left(0, \dfrac{r^2+4}{4}\right) \\ \mathrm{A}_1\left(\sqrt{r^2-4}, \dfrac{r^2-4}{4}\right) \\ \mathrm{A}_2\left(-\sqrt{r^2-4}, \dfrac{r^2-4}{4}\right) \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

$$r>2 \quad \cdots(\text{答})$$

2．$r=4$ のとき，1の考察から

$\mathrm{B}(0,\ 5)$，$\mathrm{A}_1(2\sqrt{3},\ 3)$，$\mathrm{A}_2(-2\sqrt{3},\ 3)$

だから，$\beta=\angle\mathrm{A}_1\mathrm{B}\mathrm{A}_2$として

$$(4\sqrt{3})^2=(\sqrt{12+4})^2+16-2\cdot4\cdot4\cos\beta$$

$$\Leftrightarrow \cos\beta=-\frac{1}{2}$$

これと題意から，$\angle\mathrm{A}_1\mathrm{B}\mathrm{A}_2=120°$ $\cdots$(答)

３．求める面積は，直線$y=3$と曲線Cで囲まれた図形から弓形$\mathrm{A_1A_2}$（弧$\overset{\frown}{\mathrm{A_1A_2}}$と弦$\mathrm{A_1A_2}$で囲まれた図形）を除いたものの面積だから

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(3-\frac{1}{4}x^2\right)dx+\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{2}{3}\pi$$

$$=12\sqrt{3}-\frac{16}{3}\pi$$

…(答)

高松高等予備校

〔4〕

1． $f'(x)=3x^2-1=3\left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

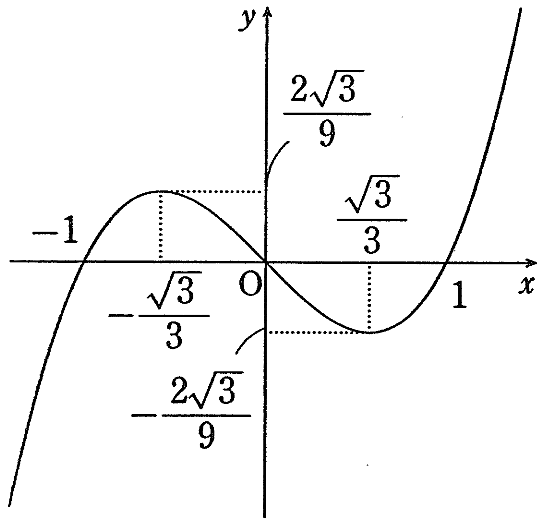
だから，増減表は

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

となるので，求める極値は

$$\left.\begin{array}{l} \text{極大値：} f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \\ \text{極小値：} f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \end{array}\right\} \qquad \cdots(\text{答})$$

概形は



2． 1．の考察より，求める方程式は

$$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t$$

$$\Leftrightarrow\ y=(3t^2-1)x-2t^3 \qquad \cdots(\text{答})$$

3． 上の接線と曲線 $y=f(x)$ の共有点について

$$x^3-x=(3t^2-1)x-2t^3$$

$$\Leftrightarrow\ x^3-3t^2x+2t^3=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-t)^2(x+2t)=0$$

題意より，点Bの x 座標は $t\,(t>0)$ ではないから，求める座標は

$(-2t,\ -8t^3+2t)$ …(答)

4．求める面積は，上の結果より

$$\frac{1}{2}\left|t(-8t^3+2t)-(t^3-t)(-2t)\right|$$

$=3t^4$ …(答)

高松高等予備校

〔5〕

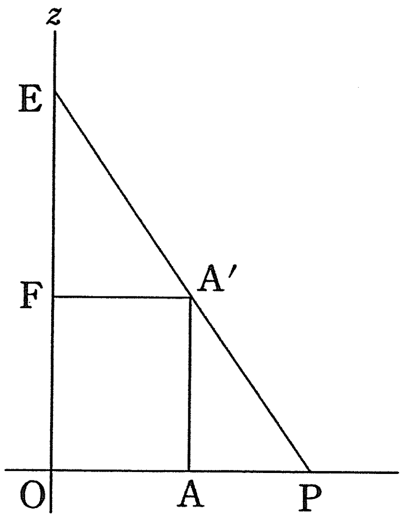
1．立方体の下底面がxy平面上の4直線

$$x=\pm a,\ y=\pm a$$

で囲まれた正方形ABCD

(ただし，A，B，C，Dはこの順に第1象限，第2象限，第3象限，第4象限にあるものとする)で，立方体の上底面が$z=2a$上にあるようにxyz座標系を設定できる。このとき

$\mathrm{A}'(a, a, 2a)$，円錐の頂点をE，$\mathrm{F}(0, 0, 2a)$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}, \dfrac{x}{\sqrt{2}}, 0\right)$



とすると，

$$\triangle \mathrm{OPE} \backsim \triangle \mathrm{FA'E}$$

だから，

$$h(x) : x = (h(x)-2a) : \sqrt{2}\,a$$

∴

$$\sqrt{2}\,a h(x) = x\,(h(x)-2a)$$

あきらかに$x>\sqrt{2}\,a$であって

$$h(x)=\frac{2ax}{x-\sqrt{2}\,a}$$

…(答)

2．1．の結果より

$$V(x)=\frac{1}{3}(\pi x^2)\,h(x)$$

$$=\frac{2\pi a x^3}{3(x-\sqrt{2}\,a)}$$

…(答)

3．2．の結果より

$$V'(x)=\frac{2\pi a}{3}\cdot\frac{3x^2(x-\sqrt{2}\,a)-x^3}{(x-\sqrt{2}\,a)^2}$$

$$=\frac{2\pi a x^2(2x-3\sqrt{2}\,a)}{3\,(x-\sqrt{2}\,a)^2}$$

これより増減表は

x	$\sqrt{2}\,a$	$\cdots$	$\frac{3\sqrt{2}\,a}{2}$	$\cdots$
$V'(x)$		$-$	0	$+$
$V(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって$V(x)$は

$$x=\frac{3\sqrt{2}\,a}{2}$$ …(答)

のとき最小値

$$V\left(\frac{3\sqrt{2}\,a}{2}\right)=9\pi a^3$$ …(答)

をとる。

4．立方体の表面積Sは

$$S=(2a)^2\cdot 6=24a$$

$V(x)$が最小となるときの円錐の表面積Tは，$h(x)=h\left(\frac{3\sqrt{2}\,a}{2}\right)=6a$に注意して

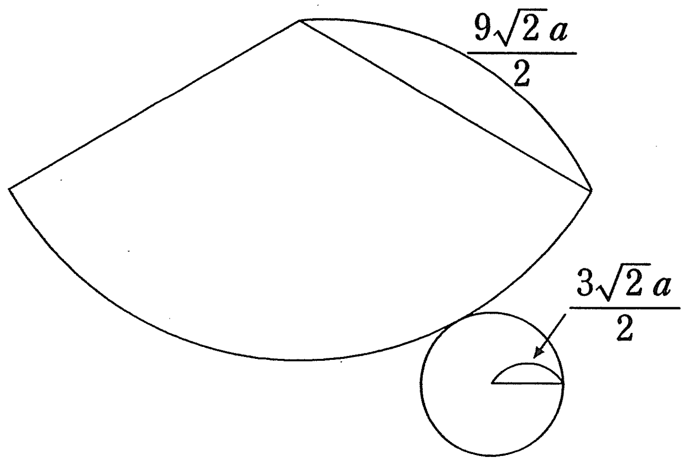
半径$\frac{3\sqrt{2}\,a}{2}$の円である底面と

半径$\sqrt{(6a)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}\,a}{2}\right)^2}=\frac{9\sqrt{2}\,a}{2}$，弧長$3\sqrt{2}\,\pi a$の扇形の面積の和であるから

$$T=\frac{9\pi}{2}a^2+\frac{27\pi}{2}a^2=18\pi a^2$$

よって，求める比は

$$S:T=4:3\pi$$ …(答)



高松高等予備校