

[1]

1. Gは△OABの重心だから

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3} \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right) = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

…(答)

2. Gは直線CD上の点であるから

$$\overrightarrow{OG} = (1-t)\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OD}$$

なる実数tが存在し、題意より

$$\overrightarrow{OG} = r(1-t)\vec{a} + st\vec{b}$$

1. の結果と、 \vec{a} 、 \vec{b} が1次独立であることより

$$r(1-t) = st = \frac{1}{3}$$

これより

$$1-t = \frac{1}{3r}, \quad t = \frac{1}{3s}$$

よって

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3r}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{3s}\overrightarrow{OD}$$

…(答)

3. 2. の考察より

$$\frac{1}{3r} + \frac{1}{3s} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 3$$

…(答)

4. 題意より

$$(\triangle OCD) = r|s|(\triangle OAB)$$

だから

$$(\triangle OCD) = (\triangle OAB)$$

となる条件は

$$r|s| = 1$$

これと3. の結果より

$$\pm r = 3 - \frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow r^2 \mp 3r \pm 1 = 0 \quad (\text{複号同順})$$

$0 < r \leq 1$ に注意して

$$r = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

…(答)

5. $OC : CA = 3 : 1$ のとき $r = \frac{3}{4}$

だから 3. の結果より $s = \frac{3}{5}$

よって $OD : DB = 3 : 2$

…(答)

高松高等予備校

[2]

1. 与えられた条件より

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3q - 2p \quad \dots (\text{答})$$

$$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3(3q - 2p) - 2q = 7q - 6p \quad \dots (\text{答})$$

$$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3(7q - 6p) - 2(3q - 2p) = 15q - 14p \quad \dots (\text{答})$$

$$a_6 = 3a_5 - 2a_4 = 3(15q - 14p) - 2(7q - 6p) = 31q - 30p \quad \dots (\text{答})$$

2. 題意より

$$\begin{cases} b_{n+1} = 2b_n \\ b_1 = q - p \end{cases}$$

なので数列 $\{b_n\}$ は初項 $(q-p)$, 公比 2 の等比数列である。

よって

$$\begin{cases} b_1 = q - p \\ b_2 = 2(q - p) \\ b_3 = 4(q - p) \\ b_4 = 8(q - p) \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

3. 2. の考察から

$$b_n = a_{n+1} - a_n = 2^{n-1}(q-p)$$

なので, $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (q-p) \cdot 2^{k-1}$$

$$= (q-p) \cdot 2^{n-1} + 2p - q$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

$$\therefore a_n = (q-p) \cdot 2^{n-1} + 2p - q \quad \dots (\text{答})$$

4. 3. の考察から

$$a_n = (q-p) \cdot 2^{n-1} + 2p - q$$

なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \{(q-p) \cdot 2^{k-1} + 2p-q\} \\ &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} (q-p) + (2p-q)n \\ &= (q-p) \cdot 2^n + (2p-q)n + p-q \end{aligned} \quad \dots (\text{答})$$

高松高等予備校

[3]

1. $C: y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点 $P\left(t, \frac{1}{4}t^2\right)$ について

$$\begin{aligned} BP^2 &= t^2 + \left(\frac{1}{4}t^2 - b\right)^2 = \frac{1}{16}t^4 + \left(1 - \frac{1}{2}b\right)t^2 + b^2 \\ &= \frac{1}{16}(t^2 + 8 - 4b)^2 - 4 + 4b \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

だから、題意のようになる条件は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 4b - 8 > 0 \\ 4b - 4 = r^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} r > 2 \\ b = \frac{r^2 + 4}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

このとき、 $\textcircled{1}$ が最小値 r^2 をとる P が A_1, A_2 であるから、題意より

$$\begin{cases} B\left(0, \frac{r^2 + 4}{4}\right) \\ A_1\left(\sqrt{r^2 - 4}, \frac{r^2 - 4}{4}\right) \\ A_2\left(-\sqrt{r^2 - 4}, \frac{r^2 - 4}{4}\right) \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

$$r > 2 \quad \dots (\text{答})$$

2. $r=4$ のとき、1の考察から

$$B(0, 5), A_1(2\sqrt{3}, 3), A_2(-2\sqrt{3}, 3)$$

だから、 $\beta = \angle A_1BA_2$ として

$$\begin{aligned} (4\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{12+4})^2 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cos \beta \\ \Leftrightarrow \cos \beta &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

これと題意から、 $\angle A_1BA_2 = 120^\circ$... (答)

3. 求める面積は、直線 $y=3$ と曲線 C で囲まれた図形から弓形 A_1A_2 (弧 $\widehat{A_1A_2}$ と弦 A_1A_2 で囲まれた図形)を除いたものの面積だから

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(3 - \frac{1}{4}x^2\right) dx + \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{2}{3}\pi$$
$$= 12\sqrt{3} - \frac{16}{3}\pi$$

… (答)

高松高等予備校

[4]

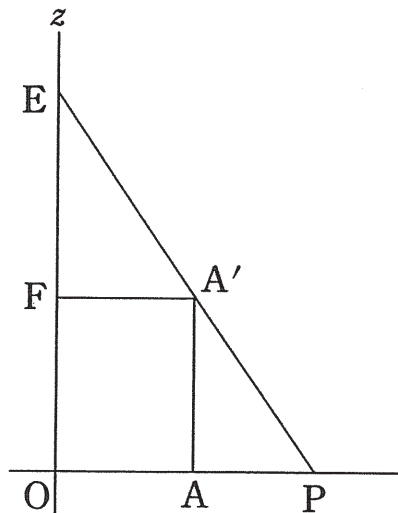
1. 立方体の下底面が xy 平面上の4直線

$$x = \pm a, y = \pm a$$

で囲まれた正方形 ABCD

(ただし, A, B, C, Dはこの順に第1象限, 第2象限, 第3象限, 第4象限にあるものとする)で, 立方体の上底面が $z = 2a$ 上にあるように xyz 座標系を設定できる。このとき

$$A'(a, a, 2a), \text{円錐の頂点を } E, F(0, 0, 2a), P\left(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}}, 0\right)$$



とすると,

$$\triangle OPE \sim \triangle FA'E$$

だから,

$$h(x) : x = (h(x) - 2a) : \sqrt{2}a$$

\therefore

$$\sqrt{2}ah(x) = x(h(x) - 2a)$$

あきらかに $x > \sqrt{2}a$ であって

$$h(x) = \frac{2ax}{x - \sqrt{2}a}$$

...(答)

2. 1. の結果より

$$V(x) = \frac{1}{3}(\pi x^2) h(x)$$

$$= \frac{2\pi ax^3}{3(x - \sqrt{2}a)}$$

...(答)

3. 2. の結果より

$$V'(x) = \frac{2\pi a}{3} \cdot \frac{3x^2(x - \sqrt{2}a) - x^3}{(x - \sqrt{2}a)^2}$$

$$= \frac{2\pi a x^2(2x - 3\sqrt{2}a)}{3(x - \sqrt{2}a)^2}$$

これより増減表は

x	$\sqrt{2}a$...	$\frac{3\sqrt{2}a}{2}$...
$V'(x)$	\diagdown	-	0	+
$V(x)$	\diagdown	\searrow	極小	\nearrow

よって $V(x)$ は

$$x = \frac{3\sqrt{2}a}{2} \quad \dots(\text{答})$$

のとき最小値

$$V\left(\frac{3\sqrt{2}a}{2}\right) = 9\pi a^3 \quad \dots(\text{答})$$

をとる。

4. 立方体の表面積 S は

$$S = (2a)^2 \cdot 6 = 24a^2$$

$V(x)$ が最小となるときの円錐の表面積 T は、 $h(x) = h\left(\frac{3\sqrt{2}a}{2}\right) = 6a$

に注意して

半径 $\frac{3\sqrt{2}a}{2}$ の円である底面と

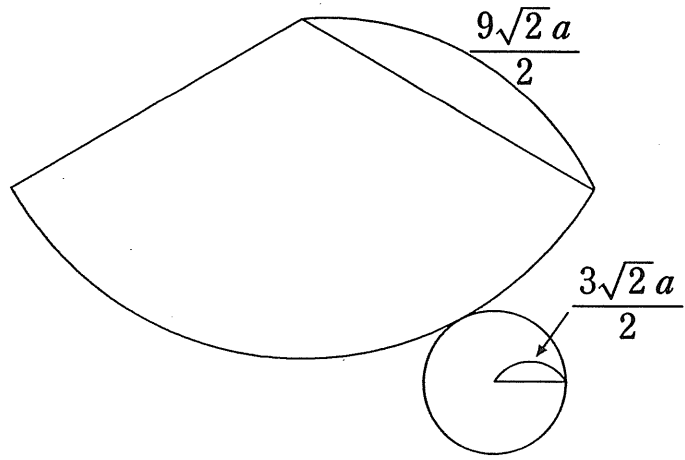
半径 $\sqrt{(6a)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}a}{2}\right)^2} = \frac{9\sqrt{2}a}{2}$, 弧長 $3\sqrt{2}\pi a$ の扇形の面積の

和であるから

$$T = \frac{9\pi}{2}a^2 + \frac{27\pi}{2}a^2 = 18\pi a^2$$

よって、求める比は

$$S : T = 4 : 3\pi \quad \dots(\text{答})$$



高松高等予備校