〔1〕

1．与式から

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(2)=30 \\ f(3)=510 \end{array}\right\}$$ …(答)

2．$f(n)=(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)+5n^3(n-1)(n-2)+5(n+1)n(n-1)$

ここで $(n+1)n(n-1)$ の 3 因数のうち少なくとも 1つは偶数，少なくとも 1 つは 3 の倍数ゆえ $(n+1)n(n-1)$ は 6 の倍数である。

同様に $n(n-1)(n-2)$ も 6 の倍数なので $f(n)$ は 6 の倍数である。 …①

また $(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)$ の 5 因数のうち，少なくとも 1 つは 5 の倍数ゆえ $(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)$ は 5 の倍数である。

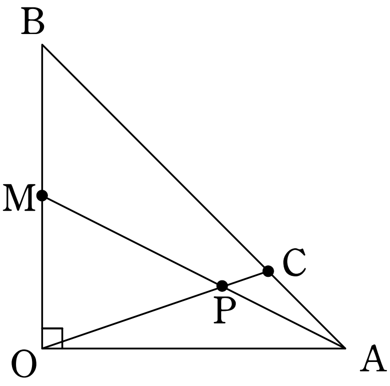
よって $f(n)$ は 5 の倍数である。 …②

①，②より 任意の自然数 n に対して $f(n)$ は 30 で割り切れる。

[証明終]

高松高等予備校

〔２〕



１．題意より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}=r\left(\frac{3\,\vec{a}+\vec{b}}{4}\right) \qquad \cdots(\text{答})$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{a}=\left(\frac{3r}{4}-1\right)\vec{a}+\frac{r}{4}\,\vec{b} \qquad \cdots(\text{答})$$

２．また

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}=s\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)=-s\,\vec{a}+\frac{s}{2}\,\vec{b}$$

だから，１．の結果

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(\frac{3r}{4}-1\right)\vec{a}+\frac{r}{4}\,\vec{b}$$

と，$\vec{a}\,,\vec{b}$ がいずれも $\vec{0}$ でなく，$\vec{a}\perp\vec{b}$ であることから

$$\begin{cases} -s=\dfrac{3}{4}r-1 \\[2mm] \dfrac{s}{2}=\dfrac{r}{4} \end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases} r=\dfrac{4}{5} \\[2mm] s=\dfrac{2}{5} \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

3．$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と $|\vec{a}-\vec{b}|=4$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ より

$$16=|\vec{a}-\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2$$

ゆえに

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2\sqrt{2}$$

それゆえ

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\left|\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}\right|^2=5$$

ゆえに

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{5}$$

これと２.の結果より

$$\mathrm{PC}=(1-r)|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{\sqrt{5}}{5}$$ …(答)

また，１.２.の結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{5}(-2\vec{a}+\vec{b})$$

なので

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=\frac{40}{25}$$

ゆえに

$$\mathrm{AP}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$ …(答)

4．$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(1-r)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{3\vec{a}+\vec{b}}{20}$，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\dfrac{2\vec{a}-\vec{b}}{5}$

から

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\frac{2}{5}$$

ゆえに

$$\cos\angle\mathrm{APC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって

$$\angle\mathrm{APC}=45^\circ$$ …(答)

〔３〕

１．　$y=x^3-6x^2+9x$

について

$y'=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

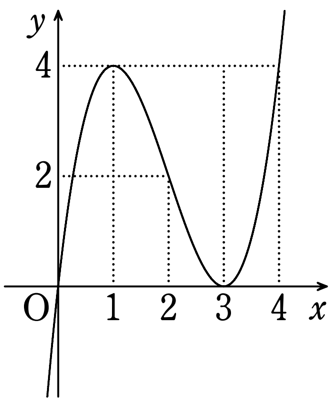
だから，yの増減は

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

$x=1$ のとき $y=4$

$x=3$ のとき $y=0$

よって概形は



…(答)

２．　1. の考察より，$0\leqq t\leqq 4$ の範囲で

$\theta=t^3-6t^2+9t$

が $\pi\,(2<\pi<4)$ となるのは

3 回　…(答)

3．　$4 \leqq t \leqq 6$ の範囲では

$$\theta = t^3 - 6t^2 + 9t$$

は単調増加であって，

$$4 \leqq \theta \leqq 54$$

$3 < \pi < 3.15$ から $1 + \dfrac{17}{63} < \dfrac{4}{\pi} < \dfrac{4}{3}$，$17 + \dfrac{1}{7} < \dfrac{54}{\pi} < 18$ なので

$$\theta = \pi \times (\text{奇数})$$

となるのは

$$\theta = (2k+1)\pi \quad (1 \leqq k \leqq 8)$$

の 8 個。これと 2. の考察より，求める回数は

11 回　　　　…(答)

高松高等予備校

〔4〕

1． A, Bについて

$$x^2-2x+1=-2x^2+8x-6$$

$$\Leftrightarrow\quad 3x^2-10x+7=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (x-1)(3x-7)=0$$

$$\therefore\quad x=1,\ \frac{7}{3}$$

これと題意より

$$\mathrm{A}\,(1,\ 0),\quad \mathrm{B}\left(\frac{7}{3},\ \frac{16}{9}\right)$$ …(答)

2． 1.の結果よりℓ の方程式は

$$y=\frac{4}{3}(x-1)$$

$$\frac{4}{3}(x-1)-(x^2-2x+1)=-x^2+\frac{10}{3}x-\frac{7}{3}$$

だから，題意より

$$S_1=\int_1^{\frac{7}{3}}\left(-x^2+\frac{10}{3}x-\frac{7}{3}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{6}x^2-\frac{7}{3}x\right]_1^{\frac{7}{3}}$$

$$=\frac{32}{81}$$ …(答)

同様に考えると

$$S_2=\int_1^{\frac{7}{3}}\left(-2x^2+\frac{20}{3}x-\frac{14}{3}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{10}{3}x^2-\frac{14}{3}x\right]_1^{\frac{7}{3}}$$

$$=\frac{64}{81}$$

よって　$S_1 : S_2 = 1 : 2$ …(答)

3． $f'(x)=2x-2$

だから　$f'(x)=\dfrac{4}{3}$を解くと　$x=\dfrac{5}{3}$

$\therefore$ $\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{4}{9}\right)$

また　$g'(x)=\dfrac{4}{3}$を解くと　$x=\dfrac{5}{3}$

$\therefore$ $\mathrm{Q}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{16}{9}\right)$

よって　Pとℓ の距離は　$\dfrac{\left|4\cdot\dfrac{5}{3}-3\cdot\dfrac{4}{9}-4\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{4}{15}$

Qとℓ の距離は　$\dfrac{\left|4\cdot\dfrac{5}{3}-3\cdot\dfrac{16}{9}-4\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{8}{15}$

よって　求める比は

$\dfrac{4}{15}:\dfrac{8}{15}=1:2$　…(答)

高松高等予備校