〔1〕

1．解と係数の関係

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$ …(答)

[証明]

$a \neq 0$ より

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

は

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

と同値。この 3 つの解が α，β，γ である条件は

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$ …①

と因数分解されることである。① の

$$(\text{右辺})=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

なので，① が x の恒等式となる条件は

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

[証明終]

2．$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ …(答)

3．$\alpha=\sin x$，$\beta=\sin y$，$\gamma=\sin z$

とおくと，$0 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より

$$0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq \gamma \leqq 1$$ …②

であって

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) & \cdots③ \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\dfrac{3}{2} & \cdots④ \\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\dfrac{1}{8}(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}) & \cdots⑤ \end{cases}$$

③，④より

$$\begin{aligned} \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha &= \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

これと⑤，および **２．** の結果も用いて

$$\begin{aligned} \alpha\beta\gamma &= \frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)}{3} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{8} \end{aligned}$$

それゆえ，**１．** の考察から α，β，γ は t の 3 次方程式

$$t^3-\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}t^2+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}t-\frac{\sqrt{6}}{8}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

の 3 つの解である。以上より ② に注意して

$$\begin{cases} \alpha=\sin x=\dfrac{1}{2} \\ \beta=\sin y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \gamma=\sin z=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6} \\ y=\dfrac{\pi}{4} \\ z=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \qquad \cdots(答)$$

〔2〕

1．　題意より

$$\begin{cases} b_2=2a_1-b_1=2 \\ a_2=\dfrac{{b_2}^2}{a_1}=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_3=2a_2-b_2=6 \\ a_3=\dfrac{{b_3}^2}{a_2}=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_4=2a_3-b_3=12 \\ a_4=\dfrac{{b_4}^2}{a_3}=16 \end{cases}$$

…(答)

2．　$\begin{cases} a_n=n^2 \\ b_n=n(n-1) \end{cases}$　…(*)　と推測される.

〔証明〕

i）　$(a_1,\ b_1)=(1,\ 0)$

より，(*)は $n=1$ のとき成り立つ.

ii）　(*)が $n=k$ (k は自然数) のとき成り立つと仮定すると

$$(a_k,\ b_k)=(k^2,\ k(k-1))$$

だから，与式から

$$\begin{cases} b_{k+1}=2a_k-b_k=(k+1)k \\ a_{k+1}=\dfrac{{b_{k+1}}^2}{a_k}=(k+1)^2 \end{cases}$$

なので，(*)は $n=k+1$ のときにも成り立つ.

以上より，(*)はすべての自然数 n について成り立つ.　…(終)

3．　2．の結果より

$$b_k=\frac{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k}{3}$$

だから

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} b_k=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\}=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

…(答)

高松高等予備校

〔3〕

1． 点 $(-2,\ 0)$ は明らかに C と ℓ の共有点である。$x \neq -2$ とする。

$$m=\frac{x(x+2)(x-3)^2}{x+2}=x(x-3)^2 \quad \cdots①$$

この式の右辺を $f(x)$ とおくと

$$f'(x)=(x-3)^2+2x(x-3)=3(x-1)(x-3)$$

から，$f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

これと $\begin{cases} f(1)=4,\ f(3)=0 \\ f(-2)=-50 \end{cases}$ より

共有点の個数は

ⅰ）$m<-50,\ -50<m<0,\ 4<m$ のとき 2 個

ⅱ）$m=-50$ のとき 1 個

ⅲ）$m=0,\ 4$ のとき 3 個

ⅳ）$0<m<4$ のとき 4 個

…(答)

2． 1. の考察より C について

$$y'=(x+2)(x-3)^2+x(x-3)^2+2x(x+2)(x-3)$$
$$=2(x-3)(2x^2-3)$$

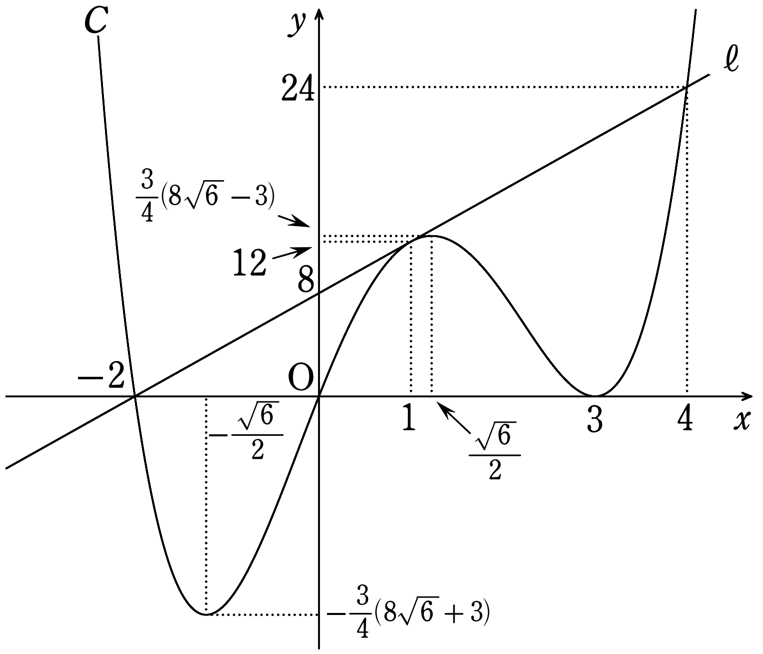
から増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$	∞
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$+\infty$

$x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき $y=\dfrac{3}{4}(8\sqrt{6}-3)$

$x=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき $y=-\dfrac{3}{4}(8\sqrt{6}+3)$

$m=4$ のときだから，概形は



…(答)

3． 求める面積は 2. の考察より

$$\left[\begin{array}{l} t=x-1 \text{ として} \\ dt=dx \\ \begin{array}{c|ccc} x & -2 & \to & 4 \\ \hline t & -3 & \to & 3 \end{array} \end{array}\right]$$

$$-\int_{-2}^{4}(x+2)(x-1)^2(x-4)dx$$

$$=-\int_{-3}^{3}t^2(t+3)(t-3)dt$$

$$=-2\int_{0}^{3}(t^4-9t^2)dt$$

$$=-2\left[\frac{1}{5}t^5-3t^3\right]_0^3=\frac{4}{5}\times 3^4=\frac{324}{5} \quad \cdots\text{(答)}$$

高松高等予備校