

[1]

1. 与式から

$$\left. \begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(2)=30 \\ f(3)=510 \end{array} \right\} \dots(\text{答})$$

2. $f(n)=(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)+5n^3(n-1)(n-2)+5(n+1)n(n-1)$

ここで $(n+1)n(n-1)$ の 3 因数のうち少なくとも 1 つは偶数, 少なくとも 1 つは 3 の倍数ゆえ $(n+1)n(n-1)$ は 6 の倍数である。

同様に $n(n-1)(n-2)$ も 6 の倍数なので $f(n)$ は 6 の倍数である。 …①

また $(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)$ の 5 因数のうち, 少なくとも 1 つは 5 の倍数ゆえ $(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)$ は 5 の倍数である。

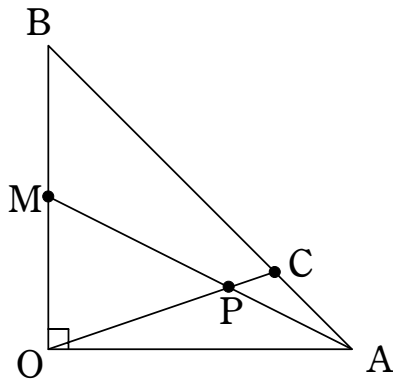
よって $f(n)$ は 5 の倍数である。 …②

①, ②より 任意の自然数 n に対して $f(n)$ は 30 で割り切れる。

[証明終]

高松高等予備校

[2]



1. 題意より

$$\overrightarrow{OP} = r \overrightarrow{OC} = r \left(\frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4} \right) \quad \dots (\text{答})$$

ゆえに

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \vec{a} = \left(\frac{3r}{4} - 1 \right) \vec{a} + \frac{r}{4} \vec{b} \quad \dots (\text{答})$$

2. また

$$\overrightarrow{AP} = s \overrightarrow{AM} = s \left(\frac{1}{2} \vec{b} - \vec{a} \right) = -s \vec{a} + \frac{s}{2} \vec{b}$$

だから, 1. の結果

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{3r}{4} - 1 \right) \vec{a} + \frac{r}{4} \vec{b}$$

と, \vec{a}, \vec{b} がいずれも $\vec{0}$ でなく, $\vec{a} \perp \vec{b}$ であることから

$$\begin{cases} -s = \frac{3}{4}r - 1 \\ \frac{s}{2} = \frac{r}{4} \end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases} r = \frac{4}{5} \\ s = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ と $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ より

$$16 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2$$

ゆえに

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$$

それゆえ

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = \left| \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4} \right|^2 = 5$$

ゆえに

$$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{5}$$

これと 2. の結果より

$$PC = (1-r)|\overrightarrow{OC}| = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \dots (\text{答})$$

また, 1. 2. の結果より

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}(-2\vec{a} + \vec{b})$$

なので

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = \frac{40}{25}$$

ゆえに

$$AP = \frac{2\sqrt{10}}{5} \quad \dots (\text{答})$$

$$4. \quad \overrightarrow{PC} = (1-r)\overrightarrow{OC} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{20}, \quad \overrightarrow{PA} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{5}$$

から

$$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA} = \frac{2}{5}$$

ゆえに

$$\cos \angle APC = \frac{\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PC}| |\overrightarrow{PA}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって

$$\angle APC = 45^\circ \quad \dots (\text{答})$$

[3]

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

について

$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$
$$= 3(x-1)(x-3)$$

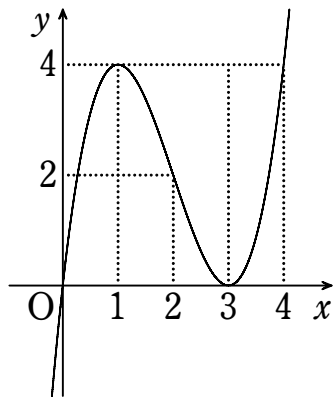
だから、 y の増減は

x	...	1	...	3	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	4	↘	0	↗

$x=1$ のとき $y=4$

$x=3$ のとき $y=0$

よって概形は



... (答)

2. 1. の考察より、 $0 \leq t \leq 4$ の範囲で

$$\theta = t^3 - 6t^2 + 9t$$

が π ($2 < \pi < 4$) となるのは

3 回

... (答)

3. $4 \leq t \leq 6$ の範囲では

$$\theta = t^3 - 6t^2 + 9t$$

は単調増加であって、

$$4 \leq \theta \leq 54$$

$3 < \pi < 3.15$ から $1 + \frac{17}{63} < \frac{4}{\pi} < \frac{4}{3}$, $17 + \frac{1}{7} < \frac{54}{\pi} < 18$ なので

$$\theta = \pi \times (\text{奇数})$$

となるのは

$$\theta = (2k+1)\pi \quad (1 \leq k \leq 8)$$

の 8 個。これと 2. の考察より、求める回数は

11 回

… (答)

高松高等予備校

[4]

1. A, Bについて

$$x^2 - 2x + 1 = -2x^2 + 8x - 6$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x-7) = 0$$

$$\therefore x = 1, \frac{7}{3}$$

これと題意より

$$A(1, 0), B\left(\frac{7}{3}, \frac{16}{9}\right)$$

...(答)

2. 1.の結果より ℓ の方程式は

$$y = \frac{4}{3}(x-1)$$

$$\frac{4}{3}(x-1) - (x^2 - 2x + 1) = -x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{7}{3}$$

だから、題意より

$$S_1 = \int_1^{\frac{7}{3}} \left(-x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{7}{3}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{10}{6}x^2 - \frac{7}{3}x\right]_1^{\frac{7}{3}}$$

$$= \frac{32}{81}$$

...(答)

同様に考えると

$$S_2 = \int_1^{\frac{7}{3}} \left(-2x^2 + \frac{20}{3}x - \frac{14}{3}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{10}{3}x^2 - \frac{14}{3}x\right]_1^{\frac{7}{3}}$$

$$= \frac{64}{81}$$

よって $S_1 : S_2 = 1 : 2$

...(答)

$$3. f'(x) = 2x - 2$$

$$\text{だから } f'(x) = \frac{4}{3} \text{ を解くと } x = \frac{5}{3}$$

$$\therefore P\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{9}\right)$$

$$\text{また } g'(x) = \frac{4}{3} \text{ を解くと } x = \frac{5}{3}$$

$$\therefore Q\left(\frac{5}{3}, \frac{16}{9}\right)$$

$$\text{よって } P \text{ と } \ell \text{ の距離は } \frac{\left|4 \cdot \frac{5}{3} - 3 \cdot \frac{4}{9} - 4\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{15}$$

$$Q \text{ と } \ell \text{ の距離は } \frac{\left|4 \cdot \frac{5}{3} - 3 \cdot \frac{16}{9} - 4\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{8}{15}$$

よって 求める比は

$$\frac{4}{15} : \frac{8}{15} = 1 : 2$$

… (答)

高松高等予備校

[5]

1. 図形の y 軸に関する対称性より

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^a x^2 dy = \pi \int_0^a (a-y) dy \\ &= \pi \left[-\frac{1}{2}(a-y)^2 \right]_0^a = \frac{\pi a^2}{2} \end{aligned} \quad \dots (\text{答})$$

2. 1. と同じく, 図形の y 軸に関する対称性より

$$y = x^2 - a$$

として

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^b x^2 dy - V_1 \\ &= \pi \int_0^b (y+a) dy - V_1 \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}(y+a)^2 \right]_0^b - V_1 \\ &= \frac{\pi}{2} \{ (a+b)^2 - a^2 - a^2 \} \\ &= \frac{\pi}{2} (b^2 + 2ab - a^2) \end{aligned} \quad \dots (\text{答})$$

3. 1. 2. の考察より

$$V_2 = cV_1$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 2ab - a^2 = ca^2$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow c &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a}\right) - 1 \\ &= \left(\frac{b}{a} + 1\right)^2 - 2 \end{aligned}$$

$0 < a \leq b$ より $\frac{b}{a} \geq 1$ なので

$$c \geq 2 \quad \dots (\text{答})$$