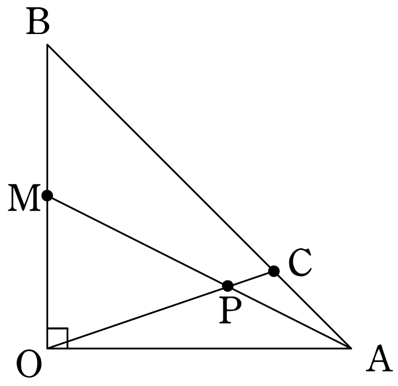
〔1〕



1．題意より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}=r\left(\frac{3\,\vec{a}+\vec{b}}{4}\right)$$ …(答)

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{a}=\left(\frac{3r}{4}-1\right)\vec{a}+\frac{r}{4}\,\vec{b}$$ …(答)

2．また

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}=s\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)=-s\,\vec{a}+\frac{s}{2}\,\vec{b}$$

だから，１．の結果

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(\frac{3r}{4}-1\right)\vec{a}+\frac{r}{4}\,\vec{b}$$

と，$\vec{a}$，$\vec{b}$ がいずれも $\vec{0}$ でなく，$\vec{a}\perp\vec{b}$ であることから

$$\begin{cases}-s=\dfrac{3}{4}r-1\\[2mm] \dfrac{s}{2}=\dfrac{r}{4}\end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases}r=\dfrac{4}{5}\\[2mm] s=\dfrac{2}{5}\end{cases}$$ …(答)

３．$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と$|\vec{a}-\vec{b}|=4$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ より

$$16=|\vec{a}-\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2$$

ゆえに

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2\sqrt{2}$$

それゆえ

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\left|\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}\right|^2=5$$

ゆえに

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{5}$$

これと２．の結果より

$$\mathrm{PC}=(1-r)|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{\sqrt{5}}{5}$$ …(答)

また，１．２．の結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{5}\left(-2\vec{a}+\vec{b}\right)$$

なので

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=\frac{40}{25}$$

ゆえに

$$\mathrm{AP}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$ …(答)

４．$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(1-r)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{3\vec{a}+\vec{b}}{20}$，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\dfrac{2\vec{a}-\vec{b}}{5}$

から

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\frac{2}{5}$$

ゆえに

$$\cos\angle\mathrm{APC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって

$$\angle\mathrm{APC}=45^\circ$$ …(答)

〔 2 〕

１． $y=x^3-6x^2+9x$

について

$$y'=3x^2-12x+9$$
$$=3(x-1)(x-3)$$

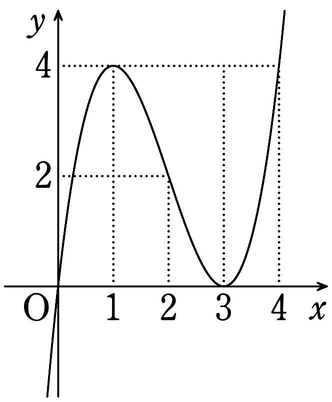
だから，y の増減は

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

$x=1$ のとき $y=4$

$x=3$ のとき $y=0$

よって概形は



…(答)

２． 1. の考察より，$0\leqq t\leqq 4$ の範囲で

$$\theta=t^3-6t^2+9t$$

が $\pi\,(2<\pi<4)$ となるのは

3 回 …(答)

３．　$4 \leqq t \leqq 6$ の範囲では

$$\theta = t^3 - 6t^2 + 9t$$

は単調増加であって，

$$4 \leqq \theta \leqq 54$$

$3 < \pi < 3.15$ から $1 + \dfrac{17}{63} < \dfrac{4}{\pi} < \dfrac{4}{3}$，$17 + \dfrac{1}{7} < \dfrac{54}{\pi} < 18$ なので

$$\theta = \pi \times (\text{奇数})$$

となるのは

$$\theta = (2k+1)\pi \quad (1 \leqq k \leqq 8)$$

の 8 個。これと 2. の考察より，求める回数は

11 回　…(答)

高松高等予備校

〔3〕

1. 放物線 $y=-x^2+2x$ …①

とx軸との交点について

$$-x^2+2x=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)=0$$

$$\therefore x=0, 2$$

これと題意よりA(2 , 0)

①について，$y'=-2x+2$ …②

なので l_1 の方程式は

$$y=-2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow y=-2x+4$$ …(答)

2. 題意と1. の結果より l_2 の傾きは $\frac{1}{2}$

$$y'=\frac{1}{2}$$

を解くと②より

$$x=\frac{3}{4}$$

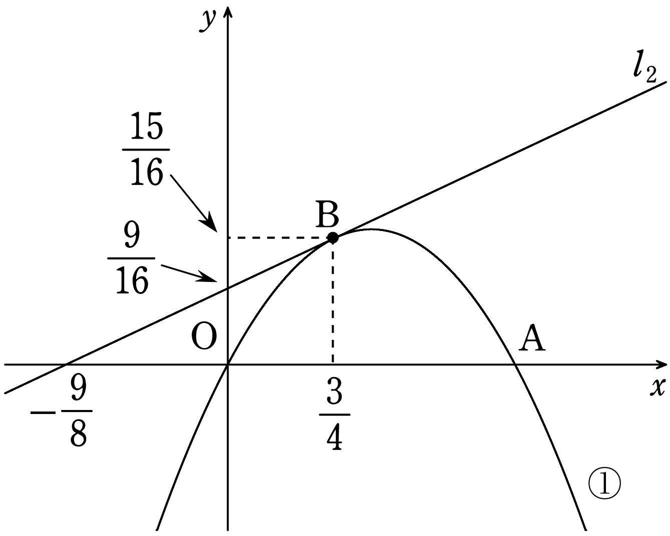
よってB$\left(\frac{3}{4}, \frac{15}{16}\right)$ …(答)

であって，l_2 の方程式は

$$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{4}\right)+\frac{15}{16}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{16}$$ …(答)

3．



①，l_2 の概形は図のようだから，求める面積は

$$\int_{-\frac{9}{8}}^{0}\left(\frac{1}{2}x+\frac{9}{16}\right)dx+\int_{0}^{\frac{3}{4}}\left\{\left(\frac{1}{2}x+\frac{9}{16}\right)-(-x^2+2x)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{16}+\int_{0}^{\frac{3}{4}}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2dx$$

$$=\frac{81}{256}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)^3\right]_0^{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{81}{256}+\frac{9}{64}$$

$$=\frac{117}{256}$$

…(答)

高松高等予備校

〔４〕

１．　図形の y 軸に関する対称性より

$$V_1=\pi\int_0^a x^2dy=\pi\int_0^a(a-y)dy$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{2}(a-y)^2\right]_0^a=\frac{\pi a^2}{2} \qquad \cdots(\text{答})$$

２．　１．と同じく，図形の y 軸に関する対称性より

$$y=x^2-a$$

として

$$V_2=\pi\int_0^b x^2dy-V_1$$

$$=\pi\int_0^b(y+a)dy-V_1$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}(y+a)^2\right]_0^b-V_1$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{(a+b)^2-a^2-a^2\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}(b^2+2ab-a^2) \qquad \cdots(\text{答})$$

３．　１．２．の考察より

$$V_2=cV_1$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2+2ab-a^2=ca^2$$

$$\Leftrightarrow \quad c=\left(\frac{b}{a}\right)^2+2\left(\frac{b}{a}\right)-1$$

$$=\left(\frac{b}{a}+1\right)^2-2$$

$0<a\leqq b$ より　$\dfrac{b}{a}\geqq 1$ なので

$$c\geqq 2 \qquad \cdots(\text{答})$$

高松高等予備校