

[1]

1. 題意より

$$\textcircled{1} \begin{cases} A > 0, B > 0, C > 0 \\ A + B + C = \pi \end{cases}$$

だから

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B &= 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ &= 2\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \cos \frac{A-B}{2} \\ &= 2\cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C}{2} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \sin C &= 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \right) \cos \frac{C}{2} \\ &= 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 2 \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \cos \frac{C}{2} \\ &= 4\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

[終]

2. ①より, 上と同様に考えて

$$\cos A + \cos B = 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\text{また } \cos C = 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2}$$

$$= 1 - 2\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

なので

$$(\text{左辺}) = 1 + 2 \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \sin \frac{C}{2}$$

$$= 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$= (\text{右辺})$$

[終]

3. ①より $A \neq \frac{\pi}{2}$, $B \neq \frac{\pi}{2}$, $C \neq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} \tan C &= \tan(\pi - A - B) \\ &= -\tan(A + B) \\ &= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} \tan A \tan B \tan C - \tan C &= \tan A + \tan B \\ \therefore \tan A + \tan B + \tan C &= \tan A \tan B \tan C \end{aligned}$$

[終]

(注) $\tan A \tan B = 1$ と仮定すると

(i) $\tan A < 0$ のとき $\tan B < 0$ と ① から $A > \frac{\pi}{2}$, $B > \frac{\pi}{2}$ となり
① に反する。

(ii) $\tan A > 0$ のとき $\tan B > 0$ と ① から $0 < A < \frac{\pi}{2}$, $0 < B < \frac{\pi}{2}$
であって

$$\tan B = \frac{1}{\tan A} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$$

だから, $B = \frac{\pi}{2} - A \Leftrightarrow A + B = \frac{\pi}{2}$ となり, これと ① から $C = \frac{\pi}{2}$

となって $C \neq \frac{\pi}{2}$ に反する。

よって, $1 - \tan A \tan B \neq 0$ である。

[2]

1. $f(x) = x^3 - 3a^2x$

から $f'(x) = 3x^2 - 3a^2$

なので、題意より

l_1 の方程式は $y = -3a^2x$ …[答]

l_2 の方程式は $y = (3p^2 - 3a^2)(x - p) + p^3 - 3a^2p$

$\therefore y = (3p^2 - 3a^2)x - 2p^3$ …[答]

2. Q は l_1, l_2 の交点ゆえ

$$-3a^2x = (3p^2 - 3a^2)x - 2p^3$$

$$\Leftrightarrow 3p^2x = 2p^3$$

$p \neq 0$ なのだから

$$x = \frac{2}{3}p$$

よって

Q $\left(\frac{2}{3}p, -2a^2p\right)$ …[答]

3. 題意と 2. の結果より

$$\begin{aligned} S + T = (\triangle OPQ) &= \frac{1}{2} \left| -2a^2p^2 - \frac{2}{3}p(p^3 - 3a^2p) \right| \\ &= \frac{1}{3}p^4 \end{aligned}$$

また直線 OP : $y = (p^2 - 3a^2)x$ なので

$$x^3 - 3a^2x - (p^2 - 3a^2)x = x^3 - p^2x = (x - p)x(x + p)$$

は 0 と p の間の x に対しては定符号である。

$$\text{よって, } S = \left| \int_0^p (x^3 - p^2x) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}p^2x^2 \right]_0^p \right| = \frac{p^4}{4}$$

なので

$$T = \frac{1}{12}p^4$$

$$\therefore S : T = \frac{1}{4} : \frac{1}{12} = 3 : 1$$

となり、この比は一定である。

[終]

高松高等予備校

[3]

1. 題意より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= A\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta + 2\sin \theta \\ 2\cos \theta + \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

なので

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OQ}|^2 &= (\cos \theta + 2\sin \theta)^2 + (2\cos \theta + \sin \theta)^2 \\ &= 5 + 8\sin \theta \cos \theta \\ &= 5 + 4\sin 2\theta\end{aligned}$$

$$0 < \theta < \pi \text{ から } 0 < 2\theta < 2\pi \quad \dots \textcircled{2}$$

なので

$$1 \leq |\overrightarrow{OQ}|^2 = 5 + 4\sin 2\theta \leq 9$$

$$\therefore 1 \leq |\overrightarrow{OQ}| \leq 3 \quad \dots [\text{答}]$$

2. 題意と①より

$$\begin{aligned}(\triangle OPQ) &= \frac{1}{2} |2\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta - 2\sin^2 \theta| \\ &= |\cos 2\theta|\end{aligned}$$

②より

$$-1 \leq \cos 2\theta < 1$$

なので, $\triangle OPQ$ の面積は

$$2\theta = \pi \text{ つまり } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \dots [\text{答}]$$

のとき最大値 1

...[答]

をとる。

3. 1. 2. の考察より

求める長さは

$$\frac{2(\triangle OPQ)}{|\overrightarrow{OQ}|} = \frac{2|\cos 2\theta|}{\sqrt{5 + 4\sin 2\theta}} \quad \dots [\text{答}]$$

$$4. \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{cases} A\vec{a} = 3\vec{a} \\ A\vec{b} = -\vec{b} \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} A^n\vec{a} = 3^n\vec{a} \\ A^n\vec{b} = (-1)^n\vec{b} \end{cases} \quad \dots\textcircled{3}$$

であることに注意する。

$$\overrightarrow{OP_1} = \frac{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}\vec{a} + \frac{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}\vec{b}$$

と表されるから、題意と③より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_n} &= A^{n-1}\overrightarrow{OP_1} \\ &= \frac{3^{n-1}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}\vec{a} + \frac{(-1)^{n-1}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}\vec{b} \end{aligned}$$

P_n がすべての自然数 n について一直線上にあるから

$$\overrightarrow{P_{k-1}P_k} = \sqrt{2} \left\{ 3^{k-2}\vec{a}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - (-1)^{k-2}\vec{b}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \quad (k \geq 2)$$

はすべて

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \sqrt{2} \left\{ \vec{a}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - \vec{b}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

に平行である。よって

$$\begin{cases} 3^{k-2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = t\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \\ (-1)^{k-2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = t\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

なる実数 t が存在することより、 t を消去して

$$\{3^{k-2} - (-1)^{k-2}\}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

これが $k \geq 2$ なるすべての自然数 k について成り立つことから

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$0 < \theta < \pi$ から $-\frac{\pi}{2} < 2\theta - \frac{\pi}{2} < \frac{3}{2}\pi$ なので、 $2\theta - \frac{\pi}{2} = 0, \pi$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

…[答]

高松高等予備校