

[1]

1. 与式から

$$2\overrightarrow{OC} = -(\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB}) \quad \dots\textcircled{1}$$

$$\therefore |2\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB}|^2$$

また題意から

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1 \quad \dots\textcircled{2}$$

だから

$$4 = 1 + 3 + 2\sqrt{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\text{これより } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \quad \dots\textcircled{3}$$

次に①, ②, ③より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB}) \\ &= -\frac{1}{2}(1+0) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \dots[\text{答}]$$

2. 1. の結果と②より

$$\begin{cases} \cos \angle AOB = 0 \\ \cos \angle AOC = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} \angle AOB = \frac{\pi}{2} \\ \angle AOC = \frac{2}{3}\pi \end{cases} \quad \dots[\text{答}]$$

3. 2. の結果と題意より

$$\angle BOC = \frac{5}{6}\pi \quad \dots\textcircled{4}$$

よって②も用いて

$$\begin{aligned}
(\triangle ABC) &= (\triangle AOB) + (\triangle BOC) + (\triangle COA) \\
&= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{5}{6} \pi + \frac{1}{2} \sin \frac{2}{3} \pi \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \quad \dots[\text{答}]
\end{aligned}$$

4. ②, ④より

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{BC}|^2 &= 1 + 1 - 2 \cos \frac{5}{6} \pi \\
&= 2 + \sqrt{3} \\
&= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} \\
\therefore |\overrightarrow{BC}| &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \quad \dots[\text{答}]
\end{aligned}$$

同様に $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
また, 2. の結果と題意より

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{\pi}{3}$$

ゆえに, 求める長さは

$$\begin{aligned}
&|\overrightarrow{BA}| \sin \angle ABC \\
&= \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \dots[\text{答}]
\end{aligned}$$

高松高等予備校

[2]

1. 題意より

$$a_n = 1 + \frac{2}{7}(n-1) = \frac{2n+5}{7} \quad \dots[\text{答}]$$

よって

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{2n+5}{7} \right) = \frac{n(2n+12)}{14} = \frac{n(n+6)}{7} \quad \dots[\text{答}]$$

2. 1.の結果から

$$a_7 = \frac{19}{7} = 2 + \frac{5}{7}$$

$$a_{14} = 4 + \frac{5}{7}$$

$$a_{15} = 5$$

だから、題意より

$$\begin{cases} b_7 = 2 \\ b_{14} = 4 \\ b_{15} = 5 \end{cases} \quad \dots[\text{答}]$$

3. 自然数 n について

$$\begin{cases} n = 7k + r \\ 1 \leq r \leq 7 \end{cases}$$

なる整数 k, r が存在し, 1.の結果より

$$a_n = \frac{2(7k+r)+5}{7} = \frac{2r+5}{7} + 2k = a_r + 2k$$

これと

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = \left(1, \frac{9}{7}, \frac{11}{7}, \frac{13}{7}, \frac{15}{7}, \frac{17}{7}, \frac{19}{7}\right)$$

より

$$\begin{aligned} b_n &= 2k + [a_r] \\ &= \begin{cases} 2k+1 & (1 \leq r \leq 4) \\ 2k+2 & (5 \leq r \leq 7) \end{cases} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで

$$100 = 7 \times 14 + 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

より

$$b_{100} = 2 \times 14 + 1 = 29 \quad \dots [\text{答}]$$

①より

$$\sum_{j=7k+1}^{7k+7} b_j = 4(2k+1) + 3(2k+2) = 14k + 10$$

これを S_k とおくと①, ②より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} b_k &= \sum_{k=0}^{13} S_k + b_{99} + b_{100} \\ &= \sum_{k=0}^{13} (14k + 10) + 29 \times 2 \\ &= \frac{14}{2}(10 + 14 \times 13 + 10) + 58 \\ &= 1472 \end{aligned} \quad \dots [\text{答}]$$

[3]

1. $x^3 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$$

だから、題意より ω は 2 次方程式

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

の解である。よって

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad \dots [\text{答}]$$

2. 1. の結果と $\omega^3 = 1$ より

$$\begin{aligned} & (a + b\omega)(a + b\omega^2) \\ &= a^2 + ab\omega + ab\omega^2 + b^2\omega^3 \\ &= a^2 + ab(-1) + b^2 \\ &= a^2 - ab + b^2 \end{aligned}$$

...[答]

3. 1. の結果から

$$\begin{aligned} & (1 + 2\omega)(c + d\omega) \\ &= c + (2c + d)\omega + 2d(-1 - \omega) \\ &= (c - 2d) + (2c - d)\omega \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c = -\frac{1}{3} \\ d = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

であれば

$$\begin{cases} c - 2d = 1 \\ 2c - d = 0 \end{cases}$$

なので

$$(1 + 2\omega)(c + d\omega) = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{1 + 2\omega} &= c + d\omega \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\omega \end{aligned}$$

...[答]

$$4. \quad \begin{cases} z = m + n\omega \\ \frac{1}{z} = p + q\omega \end{cases}$$

だから 1. の結果より

$$\begin{aligned} 1 &= (m + n\omega)(p + q\omega) \\ &= mp + (mq + np)\omega + nq(-1 - \omega) \\ &= (mp - nq) + (mq + np - nq)\omega \end{aligned}$$

いま, $mq + np - nq \neq 0$ と仮定すると

$$\omega = \frac{1 - mp + nq}{mq + np - nq}$$

と, m, n, p, q が整数であることから ω が有理数となるが, これは, ①の判別式 D が

$$D = 1 - 4 = -3 < 0$$

より ω が虚数であることに反する。

よって

$$\begin{cases} mp - nq = 1 & \dots \textcircled{2} \\ mq + np - nq = 0 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

なので②より m, n は互いに素であり

③より

$$mq = n(q - p)$$

なので

$$\begin{cases} q = kn \\ q - p = km \end{cases}$$

なる整数 k が存在し, このとき,

$$p = k(n - m)$$

だから, ②より

$$k\{m(n - m) - n^2\} = 1$$

ここで

$$\begin{aligned} &m^2 + n^2 - mn \\ &= \left(m - \frac{1}{2}n\right)^2 + \frac{3}{4}n^2 \end{aligned}$$

と m, n は自然数より

$$m^2 + n^2 - mn \geq 1$$

よって

$$mn - m^2 - n^2 \leq -1$$

だから

$$k = mn - m^2 - n^2 = -1$$

したがって

$$\begin{cases} k = -1 \\ \left(m - \frac{1}{2}n\right)^2 + \frac{3}{4}n^2 = 1 \end{cases}$$

だから

$$m = n = 1$$

である他なく

$$z = 1 + \omega$$

…[答]

高松高等予備校

[4]

1. (i) より $y=f(x)$ と直線 $y=5(x-2)+3=5x-7$
は点 $(2, 3)$ において接するから題意より

$$\begin{aligned} f(x)-5x+7 &= (x-2)^2(ax+p) \\ &= ax^3+(-4a+p)x^2+4(a-p)x+4p \end{aligned}$$

なる定数 p が存在する。これより

$$\textcircled{1} \begin{cases} b = -4a + p \\ c = 4(a - p) + 5 \\ d = 4p - 7 \end{cases}$$

一方, (ii) より

$$\begin{aligned} f(x)-1 &= (x-1)^2(ax+q) \\ &= ax^3+(-2a+q)x^2+(a-2q)x+q \end{aligned}$$

なる定数 q が存在するから

$$\textcircled{2} \begin{cases} b = -2a + q \\ c = a - 2q \\ d = q + 1 \end{cases}$$

①, ②より

$$(a, p, q) = (1, 2, 0)$$

$$\therefore (a, b, c, d) = (1, -2, 1, 1)$$

…[答]

2. 1. の結果より

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

だから

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 4x + 1 \\ &= (x-1)(3x-1) \end{aligned}$$

よって増減は

x	...	$\frac{1}{3}$...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	極大	\searrow	極小	\nearrow

これと $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{31}{27}$, $f(1) = 1$ より

$$\begin{cases} \text{極大値} & \frac{31}{27} \\ \text{極小値} & 1 \end{cases}$$

…[答]

高松高等予備校

[5]

1. $t = \sin x + \cos x$...①
 から

$$t^2 = 1 + 2\sin x \cos x$$

なので、与式から

$$f(x) = \frac{2at}{1+t^2-at} \quad \dots[\text{答}]$$

2. ①から

$$t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

これと $0 \leq x \leq 2\pi$ より

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \quad \dots②$$

なので、 $0 < a < 2$...③

から

$$1+t^2-at = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{4-a^2}{4} > 0$$

であることに注意する。

$$g(t) = \frac{2at}{t^2-at+1}$$

から

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{2a\{t^2-at+1-t(2t-a)\}}{(t^2-at+1)^2} \\ &= \frac{2a(1-t)(1+t)}{(t^2-at+1)^2} \end{aligned}$$

よって、増減表は

t	$-\sqrt{2}$...	-1	...	1	...	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		-	0	+	0	-	
$g(t)$		↘	極小	↗	極大	↘	

ここで、③より

$$g(-\sqrt{2}) = \frac{-2\sqrt{2}a}{3+\sqrt{2}a} < 0 < g(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}a}{3-\sqrt{2}a}$$

だから、 $g(t)$ は

$$\begin{cases} t=1 \text{ のとき 最大値 } g(1) = \frac{2a}{2-a} \\ t=-1 \text{ のとき 最小値 } g(-1) = \frac{-2a}{2+a} \end{cases} \quad \dots[\text{答}]$$

をとる。

3. i) $t = -1$ のとき 1. の考察より

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = -1 \\ 2\sin x \cos x = 0 \end{cases}$$

だから

$$(\cos x, \sin x) = (-1, 0), (0, -1)$$

よって, $0 \leq x \leq 2\pi$ より

$$x = \pi, \frac{3}{2}\pi$$

ii) $t = 1$ のとき 同様に

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 1 \\ 2\sin x \cos x = 0 \end{cases}$$

だから

$$(\cos x, \sin x) = (1, 0), (0, 1)$$

よって, $0 \leq x \leq 2\pi$ より

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$$

$$\begin{cases} \text{最大値} \cdots x = 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi \\ \text{最小値} \cdots x = \pi, \frac{3}{2}\pi \end{cases} \quad \dots[\text{答}]$$

高松高等予備校