[1]

1．与式から

$$2\overrightarrow{OC}=-(\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\ \overrightarrow{OB}) \qquad \cdots ①$$

$$\therefore\ |2\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\ \overrightarrow{OB}|^2$$

また題意から

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1 \qquad \cdots ②$$

だから

$$4=1+3+2\sqrt{3}\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

これより　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ 　　$\cdots ③$

次に①，②，③より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\ \overrightarrow{OB})\\&=-\frac{1}{2}(1+0)\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\dfrac{1}{2}\end{cases} \qquad \cdots[答]$$

2．1． の結果と②より

$$\begin{cases}\cos\angle AOB=0\\ \cos\angle AOC=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}\\ \angle AOC=\dfrac{2}{3}\pi\end{cases} \qquad \cdots[答]$$

3．2． の結果と題意より

$$\angle BOC=\frac{5}{6}\pi \qquad \cdots ④$$

よって ②も用いて

$$(\triangle\mathrm{ABC})=(\triangle\mathrm{AOB})+(\triangle\mathrm{BOC})+(\triangle\mathrm{COA})$$
$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$$ …[答]

4．②，④より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=1+1-2\cos\frac{5}{6}\pi$$
$$=2+\sqrt{3}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}$$

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$ …[答]

同様に $\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

また，２．の結果と題意より

$$\angle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOC}=\frac{\pi}{3}$$

ゆえに，求める長さは

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\sin\angle\mathrm{ABC}$$
$$=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}$$ …[答]

高松高等予備校

[2]

１．　題意より

$$a_n=1+\frac{2}{7}(n-1)=\frac{2n+5}{7}$$ …[答]

よって

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n}{2}\left(1+\frac{2n+5}{7}\right)=\frac{n(2n+12)}{14}=\frac{n(n+6)}{7}$$ …[答]

２．　１.の結果から

$$a_7=\frac{19}{7}=2+\frac{5}{7}$$

$$a_{14}=4+\frac{5}{7}$$

$$a_{15}=5$$

だから，題意より

$$\begin{cases} b_7=2 \\ b_{14}=4 \\ b_{15}=5 \end{cases}$$ …[答]

3．　自然数nについて

$$\begin{cases} n=7k+r \\ 1\leqq r\leqq 7 \end{cases}$$

なる整数k，rが存在し，１.の結果より

$$a_n=\frac{2(7k+r)+5}{7}=\frac{2r+5}{7}+2k=a_r+2k$$

これと

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7)=\left(1,\ \frac{9}{7},\ \frac{11}{7},\ \frac{13}{7},\ \frac{15}{7},\ \frac{17}{7},\ \frac{19}{7}\right)$$

より

$$\begin{aligned} b_n&=2k+[a_r] \\ &=\begin{cases} 2k+1 & (1\leqq r\leqq 4) \\ 2k+2 & (5\leqq r\leqq 7) \end{cases} \end{aligned} \quad \cdots①$$

ここで

$$100=7\times 14+2 \quad \cdots②$$

より

$$b_{100}=2\times 14+1=29 \quad \cdots[答]$$

①より

$$\sum_{j=7k+1}^{7k+7} b_j=4(2k+1)+3(2k+2)=14k+10$$

これをS_kとおくと①，②より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} b_k&=\sum_{k=0}^{13} S_k+b_{99}+b_{100} \\ &=\sum_{k=0}^{13}(14k+10)+29\times 2 \\ &=\frac{14}{2}(10+14\times 13+10)+58 \\ &=1472 \end{aligned} \quad \cdots[答]$$

[3]

1． $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$

から，t に関する微分を”′”で表して，

$$\begin{cases} x'=(-\sin t+\cos t)e^t \\ y'=(\sin t+\cos t)e^t \end{cases}$$

よって

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}(\cos t-\sin t)e^t \\ (\cos t+\sin t)e^t\end{pmatrix} \qquad \cdots[答]$$

であり，

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 &= e^{2t}(1-2\cos t\sin t+1+2\cos t\sin t) \\ &= 2e^{2t} \end{aligned}$$

から，$|\vec{v}|=\sqrt{2}\,e^t$ …[答]

2．1．の結果より $t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\vec{v}=e^{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}-1 \\ 1\end{pmatrix}=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{3}{4}\pi \\ \sin\dfrac{3}{4}\pi\end{pmatrix}$$

だから　$\alpha=\dfrac{3}{4}\pi$

3．1．の結果から

$$\vec{v}=\sqrt{2}\,e^t\begin{pmatrix}\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}$$

だから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{v}|}=\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\cos t+\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\sin t=\cos\frac{\pi}{4}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ として十分だから，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

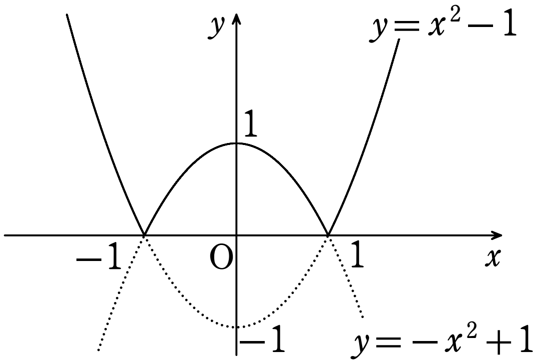
となり，$\boldsymbol{\theta}$ は一定である。 [終]

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$ …[答]

高松高等予備校

［4］

1．



…[答]

2．　$0 \leqq x \leqq 1$ では $y=-x^2+1$ だから題意より

$$V_1=\pi\int_0^1 x^2dy=\pi\int_0^1(1-y)dy$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{2}(1-y)^2\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}$$ …[答]

また $1 \leqq x$ では $y=x^2-1$ だから $b=a^2-1$ として

$$V_2=\pi\int_0^b(a^2-x^2)dy$$

$$=\pi\int_0^b(b-y)dy$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{2}(b-y)^2\right]_0^b$$

$$=\frac{\pi}{2}b^2$$

$$=\frac{\pi}{2}(a^2-1)^2$$ …[答]

3．　２．より

$$V_1=V_2$$

$$\Leftrightarrow 1=(a^2-1)^2$$

$a>1$ から

$$a^2-1=1$$

$$\therefore \quad a=\sqrt{2}$$ …[答]

高松高等予備校