[1]

$$5a_n = 2S_n - 2n + 3 \qquad \cdots(*)$$

(1)　$(*)$ に $n=1$ を代入する。

$$5a_1 = 2a_1 - 2 + 3$$

より，　$a_1 = \dfrac{1}{3}$　…[答]

$(*)$ に $n=2$ を代入する。

$$5a_2 = 2(a_1 + a_2) - 4 + 3$$

より，　$a_2 = -\dfrac{1}{9}$　…[答]

(2)　$5a_{n+1} = 2S_{n+1} - 2(n+1) + 3$

$$5a_n = 2S_n - 2n + 3$$

辺々引くと,

$$5a_{n+1} - 5a_n = 2a_{n+1} - 2$$

よって，　$a_{n+1} = \dfrac{5}{3}a_n - \dfrac{2}{3}$　…[答]

(3)　(2)より

$$a_{n+1} - 1 = \frac{5}{3}(a_n - 1)$$

と変形できる。

数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1 = -\dfrac{2}{3}$，公比 $\dfrac{5}{3}$ の等比数列より

$$a_n - 1 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$$

したがって

$$a_n = 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$$　…[答]

(4)　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}\right\}$

$$= n - \frac{2}{3}\cdot\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n - 1}{\frac{5}{3} - 1}$$

$$= n + 1 - \left(\frac{5}{3}\right)^n$$　…[答]

高松高等予備校

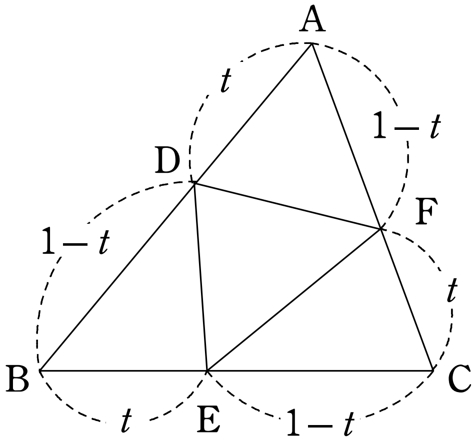
[2]

(1)　△ABC の面積が 1 より

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\mathrm{A}=1$$

このとき，△ADFの面積 (S_1) は

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AF}\cdot\sin\mathrm{A}$$
$$=\frac{1}{2}(t\cdot\mathrm{AB})\cdot(1-t)\mathrm{AC}\cdot\sin\mathrm{A}$$
$$=t(1-t)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\mathrm{A}$$
$$=t(1-t)$$



よって，求める面積は　$t(1-t)$　…[答]

(2)　$S=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{ADF}-\triangle\mathrm{BED}-\triangle\mathrm{CFE}$ である。

また，△BED の面積(S_2)，△CFE の面積(S_3)は，(1)と同様に考えると

$$S_2=\frac{1}{2}(t\cdot\mathrm{BC})\cdot(1-t)\mathrm{BA}\cdot\sin\mathrm{B}=t(1-t)$$

$$S_3=\frac{1}{2}(t\cdot\mathrm{CA})\cdot(1-t)\mathrm{CB}\cdot\sin\mathrm{C}=t(1-t)$$

なので

$$S=1-3t(1-t)=3t^2-3t+1=3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$0<t<1$ だから $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$　…[答]

(3)　チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\times\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{HC}}\times\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1$$

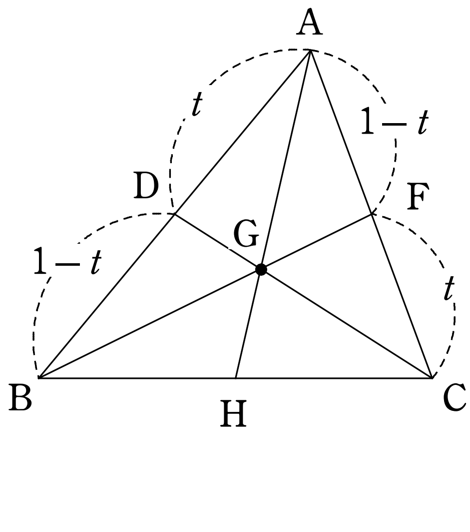
$$\therefore\ \frac{t}{1-t}\times\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{HC}}\times\frac{t}{1-t}=1$$　より

$$\mathrm{BH}:\mathrm{HC}=(1-t)^2:t^2$$

一方，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=t:(1-t)$ であり，

点 E と点 H が一致することから

$$(1-t)^2:t^2=t:(1-t)$$



よって，$t^3=(1-t)^3$ で　t は実数ゆえ

$$t=1-t\quad\therefore\ t=\frac{1}{2}$$

これは $0<t<1$ を満たすので適する。

以上より　$t=\dfrac{1}{2}$　…[答]

高松高等予備校

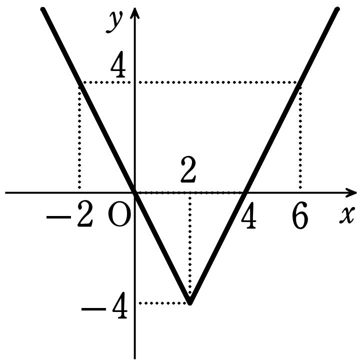
[3]

(1)　$f(x)=2|x-2|-4$

$x \geqq 2$ のとき $f(x)=2x-8$

$x<2$ のとき $f(x)=-2x$

$y=f(x)$ のグラフは右図のとおり



…[答]

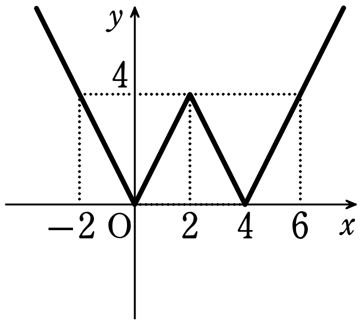
(2)　$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (f(x) \geqq 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$

$y=f(x)$ の $f(x) \leqq 0$ の部分を

x 軸で折り返したグラフと

$f(x) \geqq 0$ の部分をあわせたグラフで

右図のとおり



…[答]

(3)　$y=kx+2$　…(∗) は点 (0, 2) を通る傾き k の直線であるから

(2) の $y=|f(x)|$ と相異なる 4 点で交わるのは

(∗) が右図の①と②の間にあるときである。

①のとき (∗) は (4, 0) を通るから

$0=4k+2$

$k=-\dfrac{1}{2}$

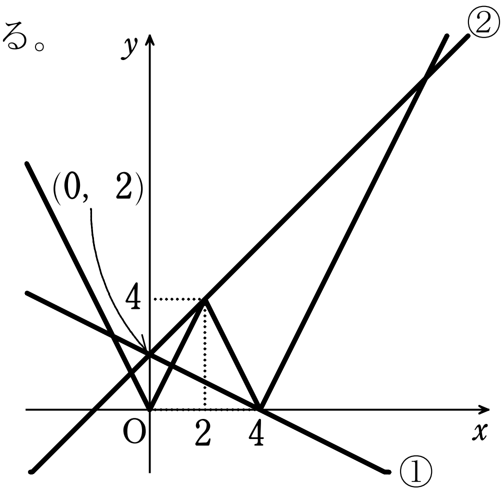
②のとき (∗) は (2, 4) を通るから

$4=2k+2$

$k=1$

したがって，求める k の範囲は

$-\dfrac{1}{2}<k<1$



…[答]

高松高等予備校

[4]

(1)　$f(x)=ax^2(x-b)$ とおける。

$$f'(x)=3ax^2-2abx$$

条件より

$$f'(-1)=3a+2ab=1 \quad \cdots\cdots①$$

$$f(-1)=-a-ab$$

これより，3 次関数と直線 ℓ との接点は $(-1,\ -a-ab)$ だから

直線 ℓ の式は　$y=x+1-a-ab$

$g(x)=x+1-a-ab$ とおくと

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は点 $(1,\ f(1))$ で交わるから

$$f(1)=g(1) \quad \therefore\ a-ab=2-a-ab \quad \therefore\ a=1$$

よって，①より　$b=-1$

したがって　$f(x)=x^3+x^2$　…[答]

(2)
$$f'(x)=3x^2+2x$$
$$=x(3x+2)$$

$f'(x)=0$ として，$x=-\dfrac{2}{3}$，0

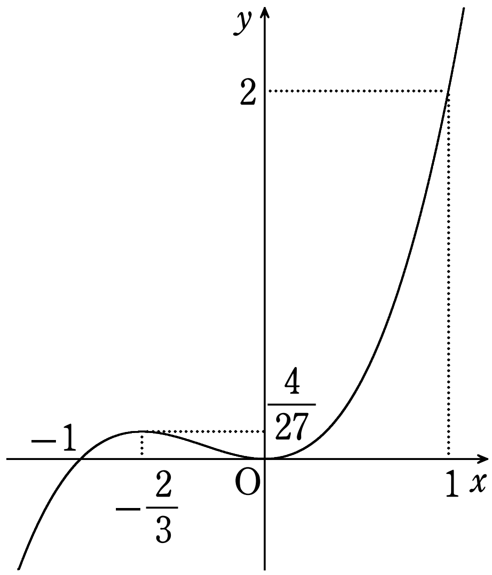
増減表は以下の通り

x		$-\dfrac{2}{3}$		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\dfrac{4}{27}$	↘	極小 0	↗

極大値：$f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2\left(-\dfrac{2}{3}+1\right)$
$$=\frac{4}{27}$$

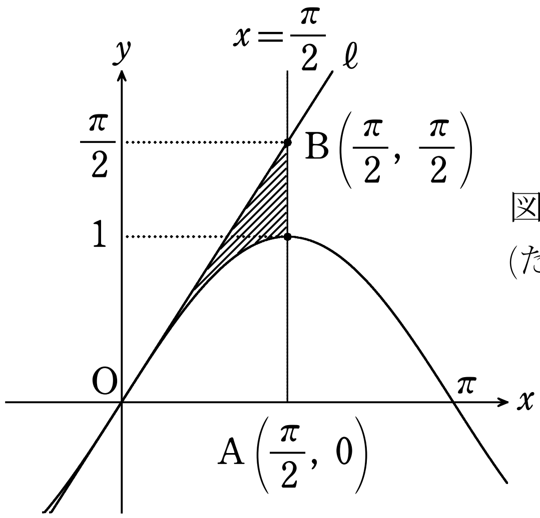
極小値：$f(0)=0$

よって，グラフは右図



高松高等予備校

[5]



図の斜線部
(ただし，境界を含む。)

(1)　$f(x)=\sin x$ とすると，$f'(x)=\cos x$

接線 ℓ の傾きは，$f'(0)=\cos 0=1$ で

点 $(0,\ 0)$ における接線であるから

$y=x$　…[答]

(2)　求める体積を V とする。

点 A$\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$，B$\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，底面の半径 $\dfrac{\pi}{2}$，高さ $\dfrac{\pi}{2}$ の円すいの体積から，曲線 $y=\sin x$ と直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ および x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積を引けばよい。

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$$

$$=\frac{\pi^4}{24}-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi^4}{24}-\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^4}{24}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi^4}{24}-\frac{\pi^2}{4}$$

$$= \frac{\pi^2}{24}(\pi^2 - 6)$$ …[答]

高松高等予備校