[1]

(1)　$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b \quad \cdots①$$

条件より，$P(-1)=-9$

$$P(2)=3\cdot 2^2-2\cdot 2+4=12$$

① により，$-a+b=-9$

$$2a+b=12$$

よって，$a=7$，$b=-2$

求める余りは，$7x-2$ …[答]

(2)　条件より，$P(x)$ を $(x-2)^3$ で割ったときの商を $R(x)$ とすると

$$P(x)=(x-2)^3R(x)+3x^2-2x+4 \quad \cdots②$$

② より

$$P(x)=(x-2)^2\{(x-2)R(x)\}+(x-2)^2\cdot 3+10x-8$$
$$=(x-2)^2\{(x-2)R(x)+3\}+10x-8$$

よって，求める余りは $10x-8$ …[答]

(3)　$P(x)$ を$(x+1)(x-2)^2$ で割ったときの商を $S(x)$ とすると，余りは2次式以下であり，(2) より $P(x)$ を $(x-2)^2$ で割った余りは $10x-8$ であるから，余りは $c(x-2)^2+10x-8$ とおける。

よって

$$P(x)=(x+1)(x-2)^2S(x)+c(x-2)^2+10x-8 \quad \cdots③$$

$P(-1)=9$ より

$$c(-3)^2-10-8=-9$$

よって，$c=1$

したがって，求める余りは

$$(x-2)^2+10x-8$$

すなわち　x^2+6x-4 …[答]

高松高等予備校

[2]

(1)　$\ell_1: mx+y=m+1$，$\ell_2: x-my=2m-3$ より

ℓ_1，ℓ_2 の法線ベクトルの１つをそれぞれ $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ とすると

$\overrightarrow{v_1}=(m,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -m)$ と表せる。

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}&=m\cdot1+1\cdot(-m)\\&=m-m\\&=0\end{aligned}$$

ゆえに，$\overrightarrow{v_1}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{v_2}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}=0$ より，ℓ_1 と ℓ_2 は垂直である。

…[証明終]

(2)　$\ell_1: mx+y=m+1$ より

$$(x-1)m+(y-1)=0$$

よって，これを m についての恒等式とすると

$$x-1=0\quad かつ\quad y-1=0$$

$$x=1\quad かつ\quad y=1$$

以上より，直線 ℓ_1 は m の値によらず，点 $(1,\ 1)$ を通る。　…[答]

(3)　ℓ_1，ℓ_2 の交点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{cases}mX+Y=m+1\\X-mY=2m-3\end{cases}\iff\begin{cases}m(X-1)=-Y+1 & \cdots①\\X+3=m(Y+2) & \cdots②\end{cases}$$

① について

ⅰ)　$X=1$ のとき

$$Y=1$$

このとき ② より，$m=\dfrac{4}{3}$

これは $m>0$ を満たす。

よって，$m=\dfrac{4}{3}$ のとき $(X,\ Y)=(1,\ 1)$

ⅱ)　$X\neq1$ のとき

① の両辺を $(X-1)$ で割ると

$$m=-\frac{Y-1}{X-1}$$

② に代入して

$$X+3=(Y+2)\cdot\left(-\frac{Y-1}{X-1}\right)$$

$$X^2+Y^2+2X+Y-5=0$$

$$(X+1)^2+\left(Y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \quad \cdots③$$

③ において，$X=1$ のとき

$$Y^2+Y-2=0$$

$$Y=-2,\ 1$$

よって，$X\neq1$ より ③ において $(X,\ Y)=(1,\ -2),\ (1,\ 1)$ は除く。

また，$m>0$ より

$$-\frac{Y-1}{X-1}>0$$

$$(X-1)(Y-1)<0$$

$$\begin{cases} X-1<0 \\ Y-1>0 \end{cases} \text{または} \quad \begin{cases} X-1>0 \\ Y-1<0 \end{cases}$$

つまり

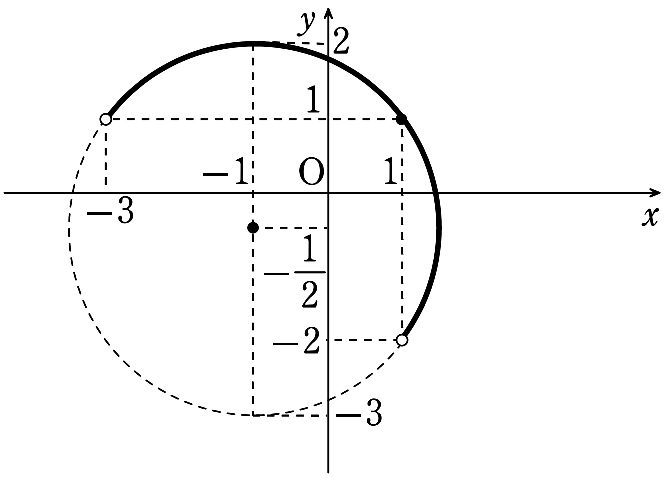
$$\begin{cases} X<1 \\ Y>1 \end{cases} \text{または} \quad \begin{cases} X>1 \\ Y<1 \end{cases}$$

i)，ii) より，点 P の軌跡は

中心 $\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)$，半径 $\frac{5}{2}$ の円の $(x<1$ かつ $y>1)$ または

$(x>1$ かつ $y<1)$ の部分および点 $(1,\ 1)$

図示すると，下図の実線部分



…[答]

[3]

(1)　$\vec{a}+3\vec{b}=2\vec{c}$ より $\vec{a}=2\vec{c}-3\vec{b}$

これを $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ に代入して

$$(2\vec{c}-3\vec{b})\cdot\vec{b}=2\vec{b}\cdot\vec{c}-3|\vec{b}|^2$$
$$=2-3|\vec{b}|^2=-1$$

$|\vec{b}|\geqq 0$ であるから　$|\vec{b}|=1$

同様にして

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot(2\vec{c}-3\vec{b})$$
$$=2|\vec{c}|^2-3=1$$
$$\therefore\quad |\vec{c}|=\sqrt{2}$$

したがって

$$|\vec{a}|^2=|2\vec{c}-3\vec{b}|^2$$
$$=4|\vec{c}|^2-12\vec{b}\cdot\vec{c}+9|\vec{b}|^2$$
$$=5$$
$$\therefore\quad |\vec{a}|=\sqrt{5}$$

以上より　$|\vec{a}|=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=\sqrt{2}$　…[答]

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}-\vec{a}$ だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$$
$$=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$$
$$=6$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6$$　…[答]

(3)
$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$$
$$=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$$
$$=8$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\geqq 0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2\sqrt{2}$

同様にして

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2$$
$$=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$$
$$=5$$
$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{5}$$

以上より　$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5}$ …[答]

(4)　△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

(2)，(3) より $|\overrightarrow{AB}|^2=8$，$|\overrightarrow{AC}|^2=5$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{40-36}=1$ …[答]

(別解)

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を θ とする

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta>0$ だから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

よって，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$=1$$ …[答]

高松高等予備校

[4]

(1)　$f(x)=2x^3-3x^2+1$ とおくと

$f(x)=(2x+1)(x-1)^2$

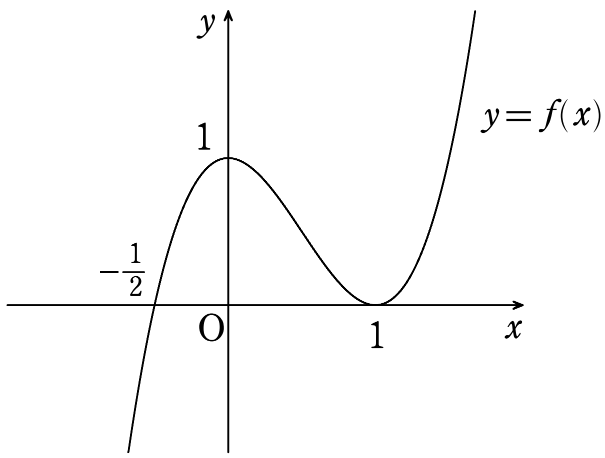
よって，$f(x)=0$ のとき $x=-\dfrac{1}{2}$，1

また，$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

よって，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

これにより $y=f(x)$ のグラフを図示すると次のようになる。



また，C の $x=-\dfrac{1}{2}$ における接線の傾きは

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}\quad\cdots①$$

ここで，直線 ℓ は傾き $2a^2$，定点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通る直線なので C と ℓ が $y>0$ の範囲で異なる 2 点と交わるとき，図と①より

$$0<2a^2<\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0<a^2<\frac{9}{4}$$

$a>0$ なので

$$0<a<\frac{3}{2}$$ …[答]

(2)　(1)より

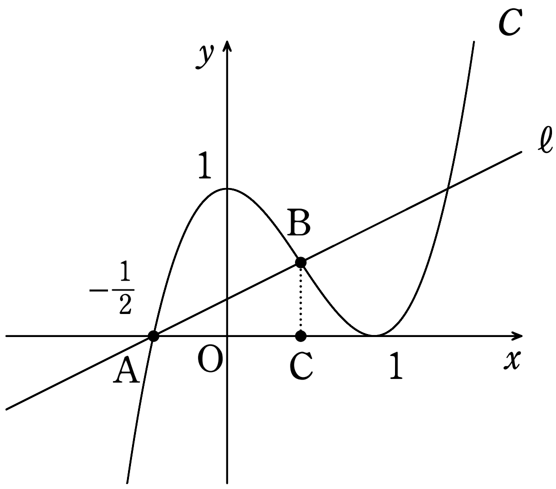
$$S_1=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(2x^3-3x^2+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-x^3+x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{27}{32}$$ …[答]

(3)



$g(x)=a^2(2x+1)$ とおき，３点A，B，Cを

$\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$，　$\mathrm{B}(p,\ g(p))$，　$\mathrm{C}(p,\ 0)$　とする。

S_2 は△ABCの面積なので

$$S_2=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{p-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\cdot g(p)$$

$$=\frac{1}{4}(2p+1)\cdot a^2(2p+1)$$

$$=\frac{a^2}{4}(2p+1)^2$$

$S_1=6S_2$ より

$$6\cdot\frac{a^2}{4}(2p+1)^2=\frac{27}{32}$$

$$a^2(2p+1)^2=\frac{9}{16}$$

$a>0$， $2p+1>0$ より

$$a(2p+1)=\frac{3}{4} \quad \cdots②$$

ここで， C と ℓ の共有点の x 座標は

$f(x)=g(x)$ より

$(2x+1)(x-1)^2=a^2(2x+1)$

$(2x+1)\{(x-1)^2-a^2\}=0$

$(2x+1)\{x-(1+a)\}\{x-(1-a)\}=0$

$x=-\frac{1}{2}$， $1+a$， $1-a$

$a>0$ より　$1-a<1+a$

よって　$p=1-a$

②より

$$a\{2(1-a)+1\}=\frac{3}{4}$$

$8a^2-12a+3=0$

$$a=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$$

これらはともに　$0<a<\frac{3}{2}$ を満たす。

$$a=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$$

…[答]

高松高等予備校