[1]

(1)　$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b \quad \cdots ①$$

条件より，$P(-1)=-9$

$P(2)=3\cdot 2^2-2\cdot 2+4=12$

① により，$-a+b=-9$

$2a+b=12$

よって，$a=7$，$b=-2$

求める余りは，$7x-2$　…[答]

(2)　条件より，$P(x)$ を $(x-2)^3$ で割ったときの商を $R(x)$ とすると

$$P(x)=(x-2)^3R(x)+3x^2-2x+4 \quad \cdots ②$$

② より

$$P(x)=(x-2)^2\{(x-2)R(x)\}+(x-2)^2\cdot 3+10x-8$$
$$=(x-2)^2\{(x-2)R(x)+3\}+10x-8$$

よって，求める余りは $10x-8$　…[答]

(3)　$P(x)$ を $(x+1)(x-2)^2$ で割ったときの商を $S(x)$ とすると，余りは 2 次式以下であり，(2) より $P(x)$ を $(x-2)^2$ で割った余りは $10x-8$ であるから，余りは $c(x-2)^2+10x-8$ とおける。

よって

$$P(x)=(x+1)(x-2)^2S(x)+c(x-2)^2+10x-8 \quad \cdots ③$$

$P(-1)=9$ より

$$c(-3)^2-10-8=-9$$

よって，$c=1$

したがって，求める余りは

$$(x-2)^2+10x-8$$

すなわち　x^2+6x-4　…[答]

高松高等予備校

[2]

(1)　$\ell_1: mx+y=m+1$，$\ell_2: x-my=2m-3$ より

ℓ_1，ℓ_2 の法線ベクトルの 1 つをそれぞれ $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ とすると

$\overrightarrow{v_1}=(m,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -m)$ と表せる。

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}&=m\cdot1+1\cdot(-m)\\&=m-m\\&=0\end{aligned}$$

ゆえに，$\overrightarrow{v_1}\fallingdotseq\vec{0}$，$\overrightarrow{v_2}\fallingdotseq\vec{0}$，$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}=0$ より，ℓ_1 と ℓ_2 は垂直である。

…[証明終]

(2)　$\ell_1: mx+y=m+1$ より

$$(x-1)m+(y-1)=0$$

よって，これを m についての恒等式とすると

$$x-1=0\quad\text{かつ}\quad y-1=0$$

$$x=1\quad\text{かつ}\quad y=1$$

以上より，直線 ℓ_1 は m の値によらず，点 $(1,\ 1)$ を通る。…[答]

(3)　ℓ_1，ℓ_2 の交点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{cases}mX+Y=m+1\\X-mY=2m-3\end{cases}\iff\begin{cases}m(X-1)=-Y+1 & \cdots①\\X+3=m(Y+2) & \cdots②\end{cases}$$

① について

i）　$X=1$ のとき

$$Y=1$$

このとき ② より，$m=\dfrac{4}{3}$

これは $m>0$ を満たす。

よって，$m=\dfrac{4}{3}$ のとき $(X,\ Y)=(1,\ 1)$

ii）　$X\fallingdotseq1$ のとき

① の両辺を $(X-1)$ で割ると

$$m=-\frac{Y-1}{X-1}$$

② に代入して

$$X+3=(Y+2)\cdot\left(-\frac{Y-1}{X-1}\right)$$

$$X^2+Y^2+2X+Y-5=0$$

$$(X+1)^2+\left(Y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \quad \cdots ③$$

③ において，$X=1$ のとき

$$Y^2+Y-2=0$$

$$Y=-2,\ 1$$

よって，$X \neq 1$ より ③ において $(X,\ Y)=(1,\ -2)$，$(1,\ 1)$ は除く。

また，$m>0$ より

$$-\frac{Y-1}{X-1}>0$$

$$(X-1)(Y-1)<0$$

$$\begin{cases} X-1<0 \\ Y-1>0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} X-1>0 \\ Y-1<0 \end{cases}$$

つまり

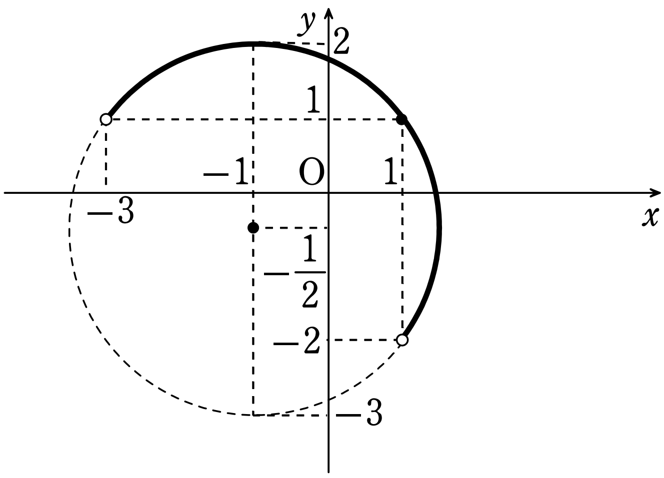
$$\begin{cases} X<1 \\ Y>1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} X>1 \\ Y<1 \end{cases}$$

i)，ii) より，点 P の軌跡は

中心 $\left(-1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{5}{2}$ の円の $(x<1$ かつ $y>1)$ または

$(x>1$ かつ $y<1)$ の部分および点 $(1,\ 1)$

図示すると，下図の実線部分



…[答]

高松高等予備校

[3]

定義より

$a_1+b_1\sqrt{5}=2+\sqrt{5}$

a_1, b_1 は自然数より　$a_1=2,\ b_1=1$　… ①

$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{5} &= (2+\sqrt{5})^{n+1} \\ &= (2+\sqrt{5})^n(2+\sqrt{5}) \\ &= (a_n+b_n\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) \\ &= (2a_n+5b_n)+(a_n+2b_n)\sqrt{5} \end{aligned}$$

a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1} は自然数より

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+5b_n \\ b_{n+1}=a_n+2b_n \end{cases} \quad \cdots ②$$

(1)　$a_n-b_n\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^n$ … (※) を数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$a_1-b_1\sqrt{5}=2-\sqrt{5}$　(①より)となって，(※)は成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき　(※)を仮定すると

$a_k-b_k\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^k$　… ③

ここで

$$\begin{aligned} (2-\sqrt{5})^{k+1} &= (2-\sqrt{5})^k(2-\sqrt{5}) \\ &= (a_k-b_k\sqrt{5})(2-\sqrt{5}) \quad (③より) \\ &= (2a_k+5b_k)-(a_k+2b_k)\sqrt{5} \\ &= a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{5} \quad (②より) \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のとき (※)は成り立つ。

(i)，(ii)より，すべての自然数 n について (※)は成り立つ。…[証明終]

(2)　$2+\sqrt{5}=\alpha$，$2-\sqrt{5}=\beta$ とおく

$$\begin{cases} a_n+b_n\sqrt{5}=\alpha^n \\ a_n-b_n\sqrt{5}=\beta^n \end{cases}$$

より　$a_n=\dfrac{1}{2}(\alpha^n+\beta^n)$，$b_n=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{5}\cdot\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha^n-\beta^n}$$

$$= \sqrt{5} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

ここで，$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{5}$$ …[答]

高松高等予備校

[4]

(1)　$\pi-x=t$ とおくと $x=\pi-t$

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \pi \\ \hline t & \pi & \to & 0 \end{array},\quad dx=-dt$$

$$\sin x=\sin(\pi-t)=\sin t$$

$$\cos x=\cos(\pi-t)=-\cos t$$

$$I_1=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+|-\cos t|}(-dt)=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+|\cos t|}dt$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+|\cos x|}dx=I_2$$

…[証明終]

(2)　(1)の結果より $I_1=\dfrac{1}{2}(I_1+I_2)$

$I_2=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x-x\sin x}{1+|\cos x|}dx$　であるから

$$I_1=\frac{1}{2}(I_1+I_2)=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+|\cos x|}dx$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+|\cos x|}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1-\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}dx$$

$$=\Big[-\log(1+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[\log(1-\cos x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\log 2+\log 2$$

$$=2\log 2$$

したがって，$I_1=\pi\log 2$　…[答]

(3)　$$I(t)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x\cos t+\cos x\sin t}{1+|\cos x|}dx$$

$$=\cos t\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+|\cos x|}dx+\sin t\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+|\cos x|}dx$$

(2)より $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+|\cos x|}dx=2\log 2$

また，$J=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+|\cos x|}dx$ において $\pi-x=u$ とおくと

$x=\pi-u$, $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \pi \\ \hline u & \pi & \to & 0 \end{array}$, $dx=-du$

$\cos x=\cos(\pi-u)=-\cos u$

$$J=\int_{\pi}^{0}\frac{-\cos u}{1+|-\cos u|}(-du)=-\int_{0}^{\pi}\frac{\cos x}{1+|\cos x|}dx=-J$$

このとき，$J=0$

したがって，$I(t)=2\log 2\cdot\cos t$

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$0\leqq\cos t\leqq 1$ であるから

$I(t)$ は，

$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 0

である。 …[答]

高松高等予備校