

数学 (数学 I ・ 数学 II ・ 数学 A ・ 数学 B)

1

$$(1) \quad x^{3m} - 1 = (x^3)^m - 1$$

$$= (x^3 - 1)\{(x^3)^{m-1} + (x^3)^{m-2} + \dots + x^3 + 1\}$$

m は正の整数であるから, $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れる …[証明終]

$$(2) \quad x^3 = 1 \text{ の虚数解の 1 つを } \omega \text{ とすると, } \omega^3 = 1$$

$$\omega^3 - 1 = 0$$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

$\omega \neq 1$ であるから

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割ったときの商を $P(x)$, 余りを $ax + b$ とすると (ただし, a, b は実数)

$$x^n - 1 = (x^2 + x + 1)P(x) + ax + b$$

このとき, $\omega^n - 1 = a\omega + b$

(i) $n = 3m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) のとき, $\omega^3 = 1$ より

$$\omega^n - 1 = (\omega^3)^m - 1 = 0$$

$$a\omega + b = 0$$

a, b は実数, ω は虚数であるから, $a = b = 0$

よって, 余りは 0

(ii) $n = 3m + 1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) のとき

$$\omega^{3m+1} - 1 = a\omega + b$$

$\omega^3 = 1$ だから, $\omega^{3m+1} - 1 = \omega - 1$ より

$$\omega - 1 = a\omega + b$$

a, b は実数, ω は虚数より $a = 1, b = -1$

よって, 余りは $x - 1$

(iii) $n = 3m + 2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) のとき

$$\omega^{3m+2} - 1 = a\omega + b$$

$\omega^{3m+2} - 1 = \omega^2 - 1 = (-\omega - 1) - 1 = -\omega - 2$ より

$$-\omega - 2 = a\omega + b$$

a, b は実数, ω は虚数より $a = -1, b = -2$

よって, 余りは $-x - 2$

以上から, $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りは

$$\begin{cases} n \text{ が } 3 \text{ の倍数のとき} & 0 \\ n \text{ が } 3 \text{ で割って余りが } 1 \text{ のとき} & x-1 \\ n \text{ が } 3 \text{ で割って余りが } 2 \text{ のとき} & -x-2 \end{cases} \quad \dots[\text{答}]$$

(3) $x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $sx+t$ とすると (ただし, s, t は実数)

$$x^{2024}-1=(x^2-x+1)Q(x)+sx+t$$

$x=-\omega$ として

$$(-\omega)^{2024}-1=(\omega^2+\omega+1)Q(-\omega)-s\omega+t$$

$$\omega^{2024}-1=-s\omega+t$$

$2024=3 \times 674+2$ から $\omega^{2024}=\omega^2$ より

$$(-\omega)^{2024}-1=\omega^2-1=(-\omega-1)-1=-\omega-2$$

$$-\omega-2=-s\omega+t$$

s, t は実数, ω は虚数より, $s=1, t=-2$

したがって, 求める余りは $x-2$

$\dots[\text{答}]$

高松高等予備校

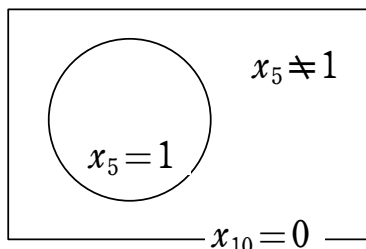
2

一般に事象Aが起こる確率を $P(A)$ と表すことにする。

(1) $x_{10}=0$ となるのは表5回裏5回出たときだから

$$P(x_{10}=0) = {}_{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{63}{256} \quad \dots[\text{答}]$$

(2) 求める確率を



$$P(x_5 \neq 1 \text{ かつ } x_{10}=0) = P(x_{10}=0) - P(x_5=1 \text{ かつ } x_{10}=0)$$

と考えると $x_5=1$ かつ $x_{10}=0$ となるのは

はじめの5回は表3回裏2回出て、

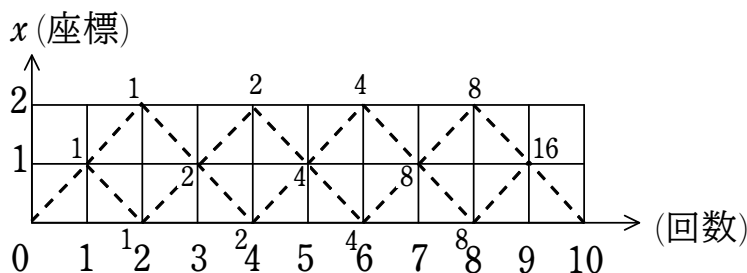
あとの5回は表2回裏3回出るときだから

$$P(x_5=1 \text{ かつ } x_{10}=0) = {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{25}{256}$$

よって

$$P(x_5 \neq 1 \text{ かつ } x_{10}=0) = \frac{63}{256} - \frac{25}{256} = \frac{19}{128} \quad \dots[\text{答}]$$

(3) 点Pの移動を次の図のように考える。



$0 \leq x_n \leq 2$ ($n=1, 2, \dots, 9$) かつ $x_{10}=0$ となるのは
点線を通過するときで、この経路は16通りある。

よって、求める確率は

$$16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{64} \quad \dots[\text{答}]$$

高松高等予備校

3

(1) $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= -\overrightarrow{AG} + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG}) + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AG} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3 \cdot \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

…[証明終]

(2) 左辺 = $|\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GC}|^2$
 $= 3|\overrightarrow{PG}|^2 + |\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 + 2\overrightarrow{PG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$
 $= 3|\overrightarrow{PG}|^2 + |\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 \quad (\because (1))$ …[証明終]

(3) (2) より $|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 = |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 - 3|\overrightarrow{PG}|^2$

P が A に一致するとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 &= |\overrightarrow{AA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - 3|\overrightarrow{AG}|^2 \\ &= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - 3 \left| \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \right|^2 \\ &= \frac{2|\overrightarrow{AB}|^2 + 2|\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{3} \\ &= \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|^2}{3} \\ &= \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{3}\end{aligned}$$

…[証明終]

(4) $\triangle ABC$ の外心を O とすると

(2) より $|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 = |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 - 3|\overrightarrow{PG}|^2$

P が O に一致するとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 &= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 - 3|\overrightarrow{OG}|^2 \\ &= R^2 + R^2 + R^2 - 3|\overrightarrow{OG}|^2 \\ &= 3R^2 - 3|\overrightarrow{OG}|^2\end{aligned}$$

(3) より $|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 = \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{3}$ であるから

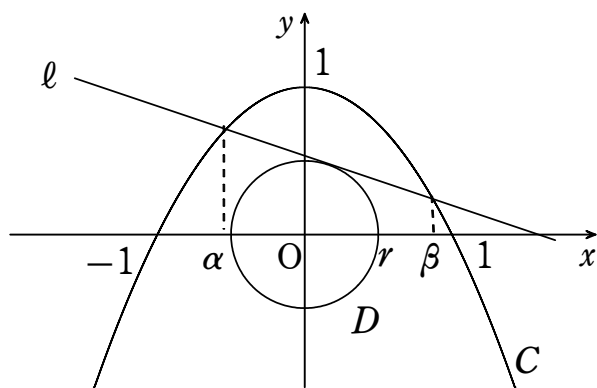
$$\frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{3} = 3R^2 - 3|\overrightarrow{OG}|^2 \leq 3R^2$$

$$\therefore R^2 \cong \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{9}$$

…[証明終]

高松高等予備校

4



$$(1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \dots \textcircled{1} \\ y = -x^2 + 1 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②より

$$1 - y + y^2 = r^2$$

$$y^2 - y - r^2 + 1 = 0$$

判別式を D とすると

$$D = 1 + 4r^2 - 4 < 0$$

$$(2r - \sqrt{3})(2r + \sqrt{3}) < 0$$

$r > 0$ より

$$0 < r < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

…[答]

(2) 接線 l の方程式は, $\sin \theta \neq 0$ より,

$$y = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} x + \frac{r}{\sin \theta}$$

よって, 放物線 C と接線 l の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると

$$\begin{cases} y = -x^2 + 1 \dots \textcircled{3} \\ y = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} x + \frac{r}{\sin \theta} \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

③, ④より

$$-x^2 + 1 = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} x + \frac{r}{\sin \theta}$$

$$x^2 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} x + \frac{r}{\sin \theta} - 1 = 0$$

α, β はこの方程式の解であるから, 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \alpha\beta = \frac{r}{\sin \theta} - 1$$

よって, 求める部分の面積 S は,

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ (-x^2 + 1) - \left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} x + \frac{r}{\sin \theta} \right) \right\} dx \\
&= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\
&= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\
&= \frac{1}{6}\{(\beta - \alpha)^2\}^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{6}\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{4r}{\sin \theta} + 4\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{4r}{\sin \theta} + 4\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{4r}{\sin \theta} + 3\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

…[答]

高松高等予備校